



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Informatica

Corso di Sistemi Informativi

Docente: Prof. GIANNI CONTE

Anno Accademico: 2010-2011

MODELLIZZAZIONE DI UN INCROCIO IN AMBIENTE JMT

Studenti:

ALESSANDRO COSTALUNGA

DAVIDE VALERIANI

Introduzione

I modelli a rete di code rappresentano un sottoinsieme della teoria delle code che, per lo più, è orientata alla rappresentazione di sistemi complessi tramite singoli centri di servizio (fig. 1), caratterizzati a loro volta in modo complesso e sui quali si compongono delle code di attesa dei *clienti* che si mettono in attesa di essere serviti. Per l'analisi di questi centri vengono poi utilizzate tecniche matematiche sofisticate che consentono di ottenere indici delle prestazioni del sistema sufficientemente precisi. I modelli a rete di code, invece di utilizzare un singolo centro molto complesso, rappresentano il sistema come una rete di centri di servizio semplici.



Figura 1: Rappresentazione grafica di un centro di servizio

Lo spazio applicativo di questi modelli è molto vasto, non solo nella matematica, ma anche nell'informatica, nella viabilità e in molte altre discipline. In questa relazione vengono utilizzati i modelli a rete di code per modellizzare gli incroci stradali gestiti tramite semaforo o rotonda.

La prima parte di questa relazione è dedicata alla presentazione del progetto di Francesco Zanini, *Modeling of a road junction using queuing theory, MATLAB and JMT environments*, che consiste nell'analisi di un incrocio stradale gestito mediante semaforo o rotonda. Successivamente, si procede all'analisi dello stesso lavoro, ricavando i risultati ottenuti dalle simulazioni di Zanini e, confrontando i flussi di automobili passanti per i due tipi di incroci, viene ricavata una statistica che indica il sistema più efficiente.

La seconda parte della relazione suggerisce alcune migliorie al progetto originale: nel caso dell'incrocio gestito da semaforo, viene modificato il protocollo; nell'incrocio gestito da rotonda, invece, si aggiunge una corsia alla rotonda. Successivamente, si procede alla valutazione dei risultati delle simulazioni.

La relazione termina con le conclusioni del lavoro svolto ed una breve bibliografia.

1 Analisi del sistema in esame

L'obiettivo del lavoro di Zanini è descrivere gli incroci stradali. In particolare, vengono analizzate le performance di questi tipi di sistemi da un punto di vista matematico, utilizzando la teoria delle code. I tipi di incroci stradali analizzati sono il semaforo e le rotatorie.

1.1 Semaforo

In un incrocio gestito da semaforo, schematizzato nella fig. 2, si può supporre che le automobili arrivino con una frequenza λ .

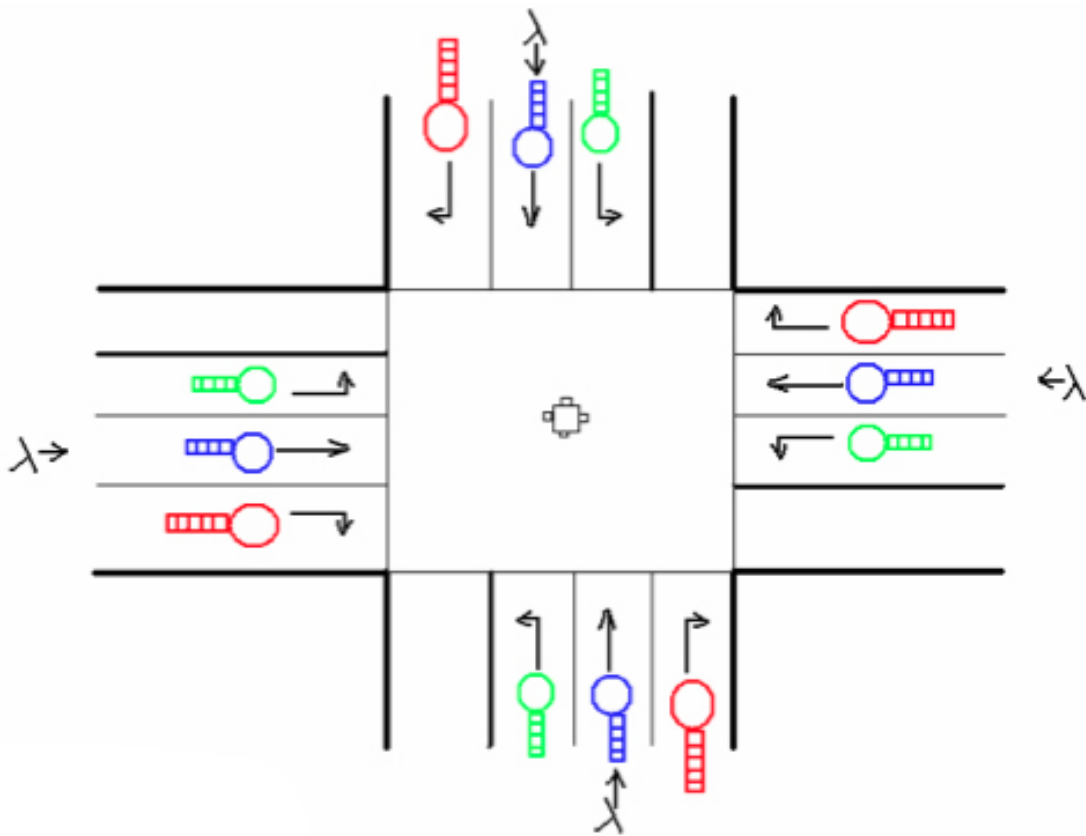


Figura 2: Modello del semaforo

Inoltre, per ottimizzare l'utilizzo dell'incrocio, si può supporre che, in un tempo $2T$, ci sia un certo numero di auto che vanno dritte o girano a destra ($R_f \cdot T$), altre auto che fanno una curva a sinistra e una a destra ($(1 - R_f) \cdot T$), il tutto per ogni coppia di strade tra loro opposte. Il funzionamento è mostrato in fig. 3.

È quindi possibile calcolare i tempi medi di attesa (costanti) per effettuare ciascuna manovra. Consideriamo i parametri di velocità delle auto R_s, R_{st}, R_{lt} rispettivamente co-

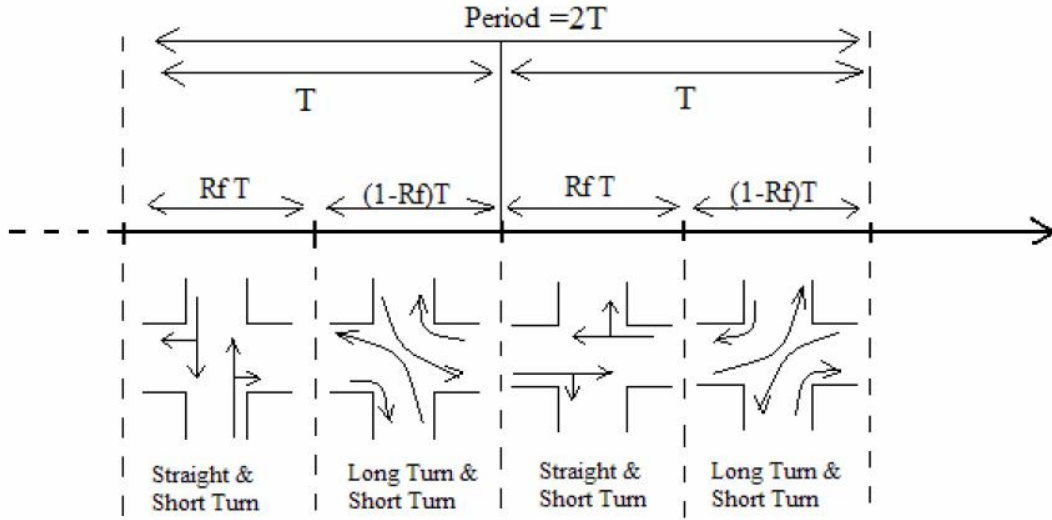


Figura 3: Protocollo di utilizzo di un semaforo

me il numero di automobili che ogni secondo vogliono andare dritto, effettuare una svolta corta o effettuare una svolta lunga.

Il tempo medio per proseguire dritto è:

$$S_s = \frac{2 \cdot T}{R_s \cdot R_f \cdot T} = \frac{2}{R_f \cdot R_s} \quad (1)$$

Il tempo medio per una svolta corta è:

$$S_{st} = \frac{2 \cdot T}{R_{st} \cdot T} = \frac{2}{R_{st}} \quad (2)$$

Il tempo medio per una svolta lunga è:

$$S_{lt} = \frac{2 \cdot T}{R_{lt} \cdot (1 - R_f) \cdot T} = \frac{2}{(1 - R_f) \cdot R_{lt}} \quad (3)$$

Consideriamo inoltre che il carico di ogni coda deve rispettare il vincolo $\lambda \cdot S \leq 1$, altrimenti il numero di automobili in coda crescerebbe in modo esponenziale, creando code infinite, il che non è realmente possibile. Pertanto, il flusso massimo di auto che entrano in coda è $\lambda_{max} = \frac{1}{S}$, dove S è il tempo di servizio e può valere S_s, S_{st} o S_{lt} .

Il tempo medio di attesa in coda W è dato da

$$W = R + N \cdot S \quad (4)$$

dove R è il tempo medio di servizio rimasto, mentre N è la lunghezza media di una coda e risponde alla legge $N = \lambda \cdot W$. Sostituendo opportunamente, si ottiene:

$$W = \frac{R}{1 - \lambda \cdot S} \quad (5)$$

A questo punto, è possibile calcolare il tempo medio D speso da ogni utente nel sistema (in una qualunque coda):

$$D = W + \frac{1}{R_{st}, R_{lt}, R_s} \quad (6)$$

Per calcolare questi valori, occorre analizzare separatamente i tre casi.

1.1.1 Calcolo del tempo di servizio residuo per la svolta corta

Si consideri la fig. 4, che rappresenta l'andamento del tempo di servizio residuo $R(t)$ nel periodo $2T$. Si nota che il server lavora effettivamente solo per metà del periodo (T secondi) e rimane inattivo nell'altra metà.

Il tempo medio di servizio residuo del sistema è calcolato integrando l'area della figura, notando che essa è composta da triangoli rettangoli isosceli.

$$R = \frac{1}{4} \left(T + \frac{1}{R_{st}} \right) \quad (7)$$

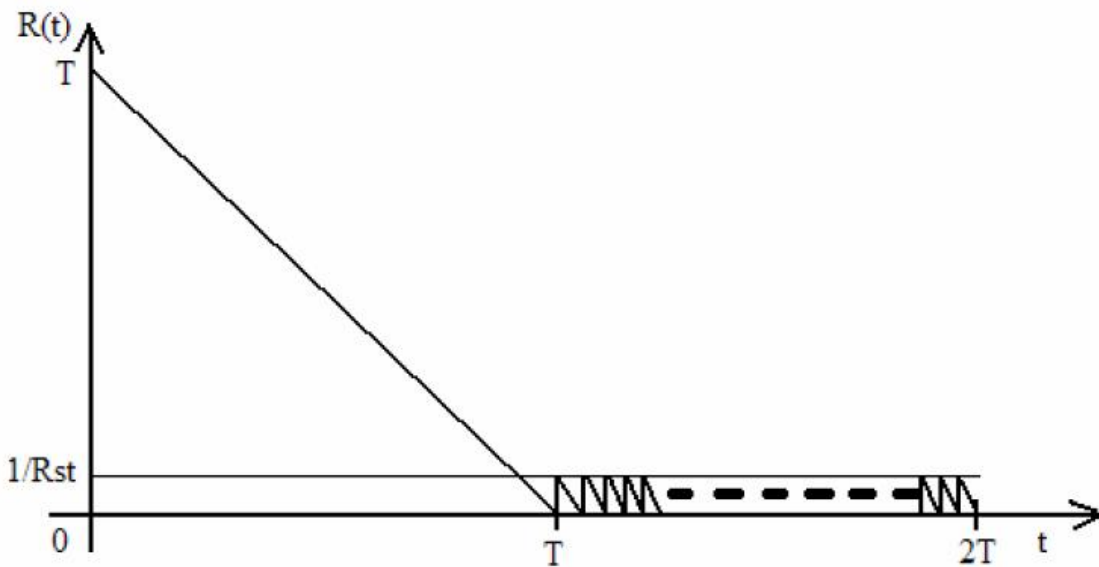


Figura 4: Tempo di servizio residuo nella coda per la svolta corta

1.1.2 Calcolo del tempo di servizio residuo per la svolta lunga

Il calcolo del tempo medio per la svolta lunga è analogo a quello precedente, ma viene fatto basandosi sulla fig. 5, che rappresenta l'andamento del tempo di servizio residuo $R(t)$ nel periodo $2T$. Si nota che il server lavora effettivamente solo per $T - R_f T$ secondi e rimane inattivo per $T + R_f T$ secondi.

Il tempo medio di servizio residuo del sistema è calcolato integrando l'area della figura, notando che essa è composta da triangoli rettangoli isosceli.

$$R = \frac{1}{4} \left(T(1 + R_f)^2 + \frac{1 - R_f}{R_{sl}} \right) \quad (8)$$

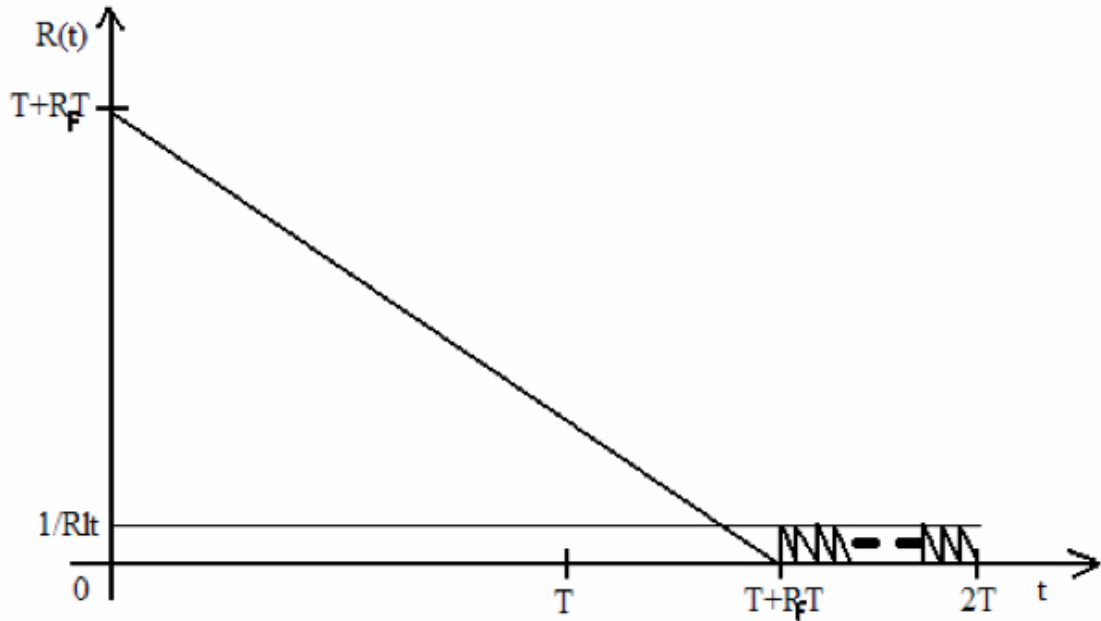


Figura 5: Tempo di servizio residuo nella coda per la svolta lunga

1.1.3 Calcolo del tempo di servizio residuo per proseguire diritto

Il calcolo del tempo medio per proseguire diritto è analogo a quello precedente, ma viene fatto basandosi sulla fig. 6, che rappresenta l'andamento del tempo di servizio residuo $R(t)$ nel periodo $2T$. Si nota che il server lavora effettivamente solo per $R_f T$ secondi e rimane inattivo per $T + T(1 - R_f)$ secondi.

Il tempo medio di servizio residuo del sistema è calcolato integrando l'area della figura, notando che essa è composta da triangoli rettangoli isosceli.

$$R = \frac{1}{4} \left(T(2 - R_f)^2 + \frac{R_f}{R_d} \right) \quad (9)$$

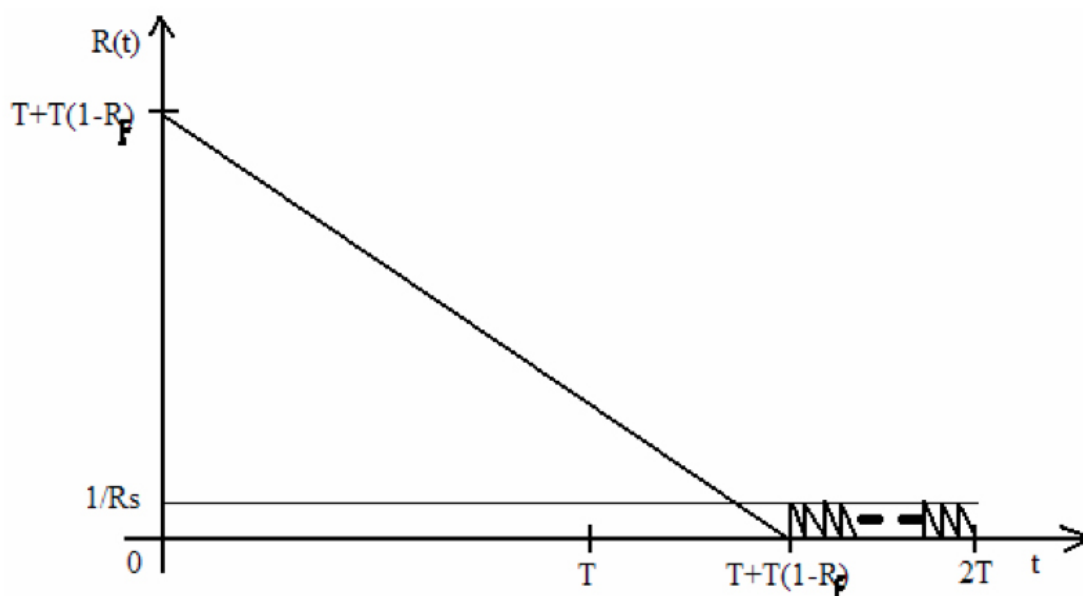


Figura 6: Tempo di servizio residuo nella coda per proseguire diritto

1.2 Rotatoria

La rotatoria che viene presa in esame, rappresentata dal modello di fig. 7, è una generica rotatoria a 2 corsie ($p = 2$) per senso di marcia in cui λ rappresenta il numero di auto in ingresso alla rotatoria (carico in ingresso), che seguono la distribuzione di Poisson. Ogni strada in ingresso alla rotatoria è modellata come un server di rete in cui il tempo di servizio dipende dalla probabilità di inserire un token in uno dei due quarti della rotatoria. Ogni corsia è modellata come un server con un tempo di servizio fisso che accetta solamente 1 job (un'auto) per volta.

I parametri medi vengono calcolati basandosi sul protocollo e su dati empirici, come la velocità delle auto ad attraversare un quarto di rotatoria R_r [auto/secondo].

Se si applica la legge di Little alla rete disegnata in rosso nella fig. 7 ad un certo istante di tempo t si ottiene:

$$N_t = \lambda_t \cdot D_t \quad (10)$$

dove D_t è il tempo medio di coda nel sistema, N_t il numero di auto nel sistema e λ_t il carico in ingresso. Ora occorre trovare una relazione tra i parametri generali del sistema e i parametri specifici di un server.

Il numero medio di auto in tutto il sistema risulta essere

$$N_t = G \cdot p \cdot n \quad (11)$$

dove $G \cdot p$ è il numero di code nel sistema e n è il numero medio di auto in ogni server (cioè strada).

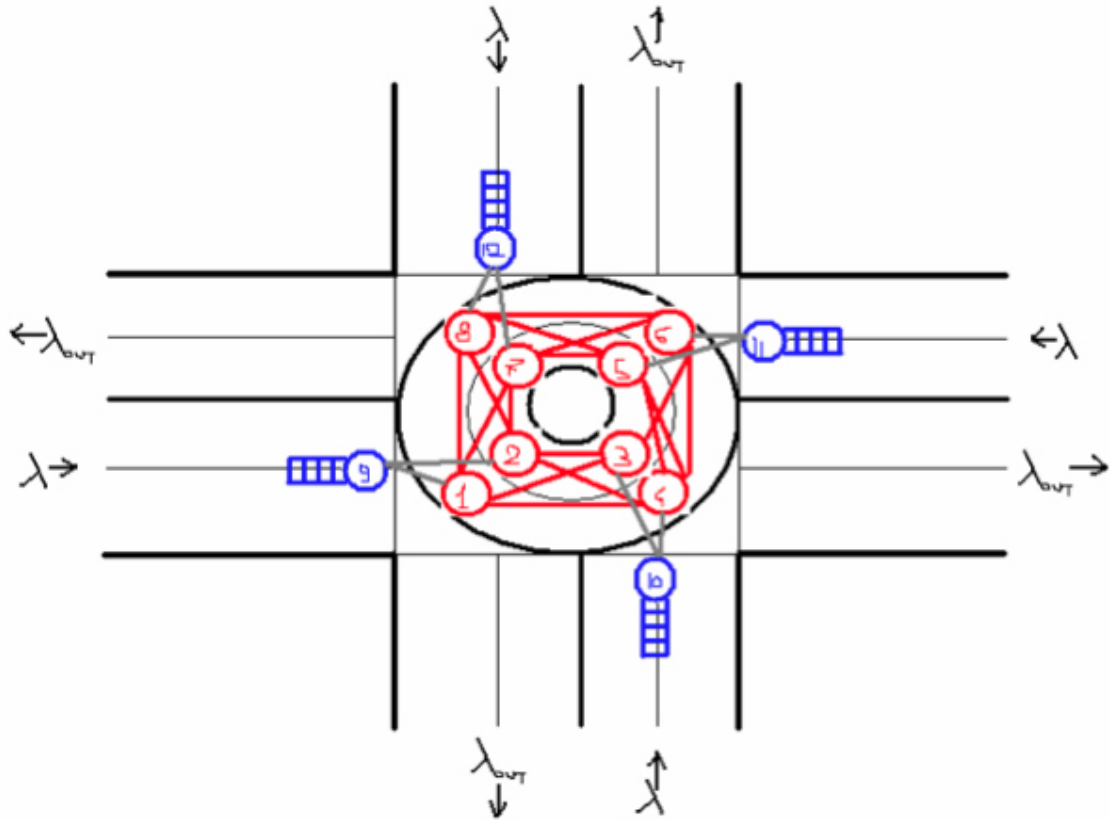


Figura 7: Modello della rotatoria

Applicando la legge di Little ad ogni server, si ottiene

$$n = \lambda_s \cdot D \quad (12)$$

dove D è il tempo medio speso in coda da ogni auto in ogni server e λ_s il carico in ingresso di ogni server. Dalla topologia della rete, si ha

$$\lambda_t = G \cdot \lambda \quad (13)$$

Il tempo medio di servizio del sistema D_t è dato da

$$D_t = H \cdot D \quad (14)$$

dove H è il numero medio di salti, cioè di attraversamenti del server, tra sorgente e destinazione, che dipende dalla topologia della rete e dalla diffusione del traffico nella rotatoria, mentre D è sempre il tempo medio speso in coda da ogni auto in ogni server.

Dalle precedenti equazioni si ottiene

$$G \cdot p \cdot \lambda_s \cdot D = H \cdot D \cdot G \cdot \lambda \quad (15)$$

Risolvendo per $\rho = \lambda_s \cdot S$, dove $S = \frac{1}{R_r}$, si ottiene

$$\rho = \frac{H \cdot S \cdot \lambda}{p} \quad (16)$$

Il parametro ρ esprime il tempo di utilizzo di ogni server rosso, ovvero la probabilità che uno slot, cioè un quarto di rotatoria, sia completo.

Se la rete non è congestionata il flusso di ingresso di ogni strada λ deve essere uguale al suo flusso di uscita λ_{out} dato da

$$\lambda_{out} = \frac{\rho \cdot r \cdot p}{S} \quad (17)$$

dove r è la probabilità che un'auto sia al suo nodo di destinazione. λ viene ricavata dall'equazione 16 come

$$\lambda = \frac{\rho \cdot p}{S \cdot H} \quad (18)$$

Dalle ultime due equazioni, si può ricavare:

$$r = \frac{1}{H} \quad (19)$$

Si consideri ora la rete dei server in blu: il loro tempo di servizio S_b dipende dalla probabilità che un'auto finisca nella rete rossa. La PDF (Probability Density Function, funzione di densità di probabilità) di S_b è data da

$$P(S_b = n \cdot S) = S \cdot (1 - P_s)^{n-1} \cdot P_s \quad (20)$$

dove P_s è la probabilità di inserire un'auto nell'intervallo di tempo S . Valore medio e varianza sono dati da:

$$\bar{S}_b = \frac{S}{P_s} \quad (21)$$

$$\bar{S}_b^2 = \frac{S^2 \cdot (2 - P_s)}{P_s^2} \quad (22)$$

Sostituendo la precedente equazione nella formula di Pollaczek-Khintchine (P.K.), usata per calcolare il tempo medio di attesa nella coda del sistema blu W , si ottiene:

$$W = \frac{S \cdot \lambda \cdot S \cdot (2 - P_s)}{2 \cdot P_s \cdot (P_s - \lambda \cdot S)} \quad (23)$$

dove P_s vale 1 (cioè significa sempre) eccetto quando tutti gli slot sono occupati e non sono arrivati a destinazione; in questo caso, P vale:

$$P_s = 1 - (\rho \cdot (1 - r))^p = 1 - \left(\rho \cdot \left(1 - \frac{1}{H}\right) \right)^p \quad (24)$$

Unendo tutte le precedenti equazioni, W può essere espresso come

$$W = \frac{S \cdot x \cdot \left(\frac{2}{1 - \left(\frac{(H-1)x}{p}\right)^p} - 1 \right)}{2 \left(1 - x - \left(\frac{(H-1)x}{p}\right)^p \right)} \quad (25)$$

dove $x = \lambda \cdot S$

Il ritardo totale all'interno del sistema D è dato da:

$$D = W + H \cdot S \quad (26)$$

1.3 Modellizzazione del semaforo con JMT

Il semaforo precedentemente descritto viene modellizzato concentrando l'attenzione su una delle quattro strade di ingresso; infatti, il modo di funzionamento è lo stesso da qualsiasi direzione si arrivi ed è indipendente dalle altre strade.

Su ogni strada ci sono tre corsie: la corsia per girare a destra (svolta corta), la corsia per proseguire dritto e la corsia per girare a sinistra (svolta lunga). Ogni corsia viene rappresentata da una sorgente, un server ed un'uscita. Inoltre, ogni corsia risulta essere indipendente dalle altre. Il modello che ne esce è rappresentato in fig. 8.

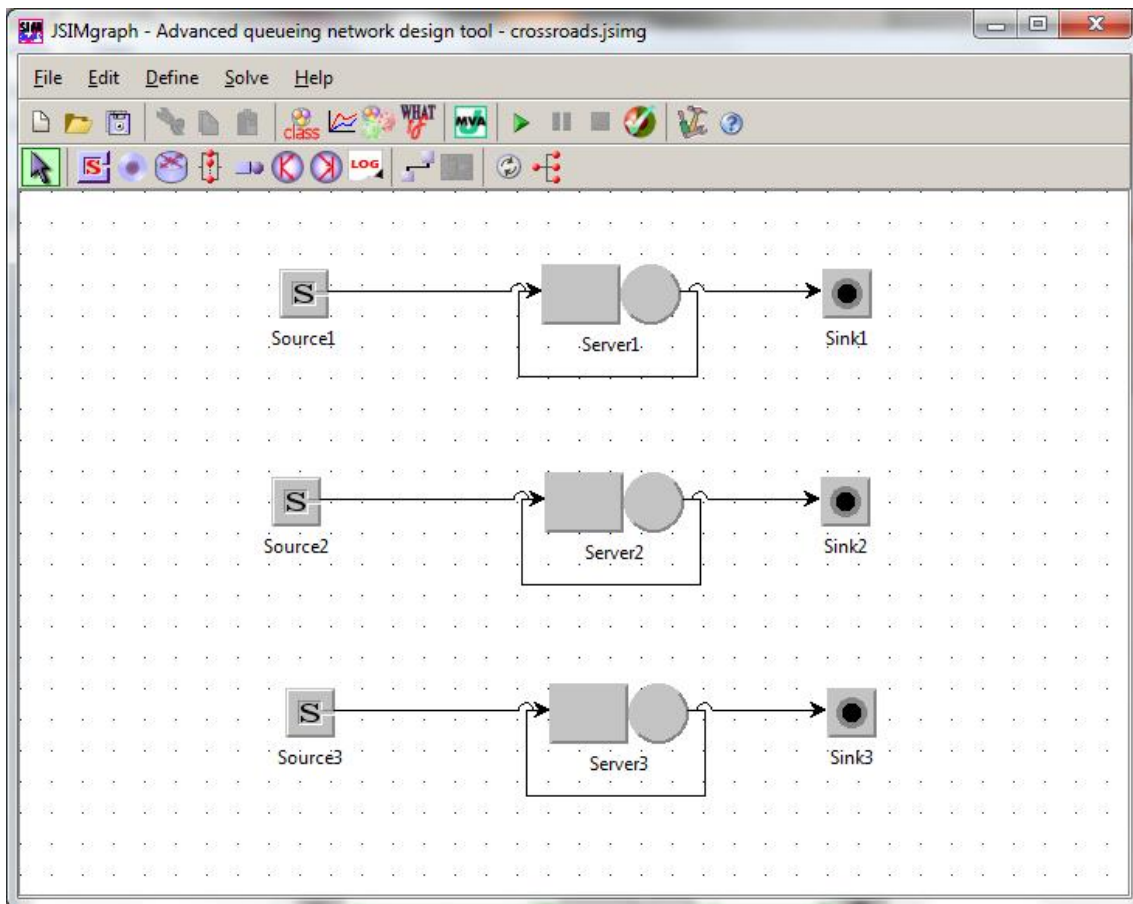


Figura 8: Modello di simulazione dell'incrocio con semaforo

Al fine di mantenere costante il numero di auto in ingresso all'incrocio, viene inserita una retroazione che, di fatto, significa che ogni auto che esce dall'incrocio viene subito sostituita da un'auto che si mette in coda.

I parametri di ingresso sono riassunti nella tabella 1. L'analisi effettuata da Zanini metteva in relazione la lunghezza della coda con l'arrivo delle autovetture. Nella nuova versione di JMT, quella utilizzata per questa relazione, il parametro *lunghezza della coda* è stato sostituito dal *numero di clienti*, inteso come il numero di entità che sono in coda più quelle che sono servite dal Server; per questo motivo, i risultati delle simulazioni di questa relazione saranno leggermente più elevati rispetto a quelli dell'analisi di Zanini.

Tabella 1: Parametri di ingresso

	Distribuzione	Tempo di servizio	Routing
Diritto	Poisson (8)	Costante (0.5)	Probabilistico $P_{Server} = 0.75; P_{Sink} = 0.25$
Svolta corta	Poisson (8)	Costante (1)	Probabilistico $P_{Server} = 0.5; P_{Sink} = 0.5$
Svolta lunga	Poisson (8)	Costante (1)	Probabilistico $P_{Server} = 0.75; P_{Sink} = 0.25$

Nelle figure seguenti sono mostrati i risultati della simulazione di ciascuna corsia delle strade dell'incrocio regolato da semaforo. In particolare, nella figura 9 i risultati della corsia per proseguire dritto (Server 1), nella figura 10 quelli della corsia per la svolta corta (Server 2) e, infine, nella figura 11 i risultati della corsia per la svolta lunga (Server 3).

I grafici seguenti descrivono l'andamento del numero di clienti (in coda + in servizio) in funzione del tasso di arrivo dei veicoli in prossimità dell'incrocio. Come si può notare, man mano che il tasso di arrivo aumenta, il numero di veicoli in coda cresce in modo esponenziale.

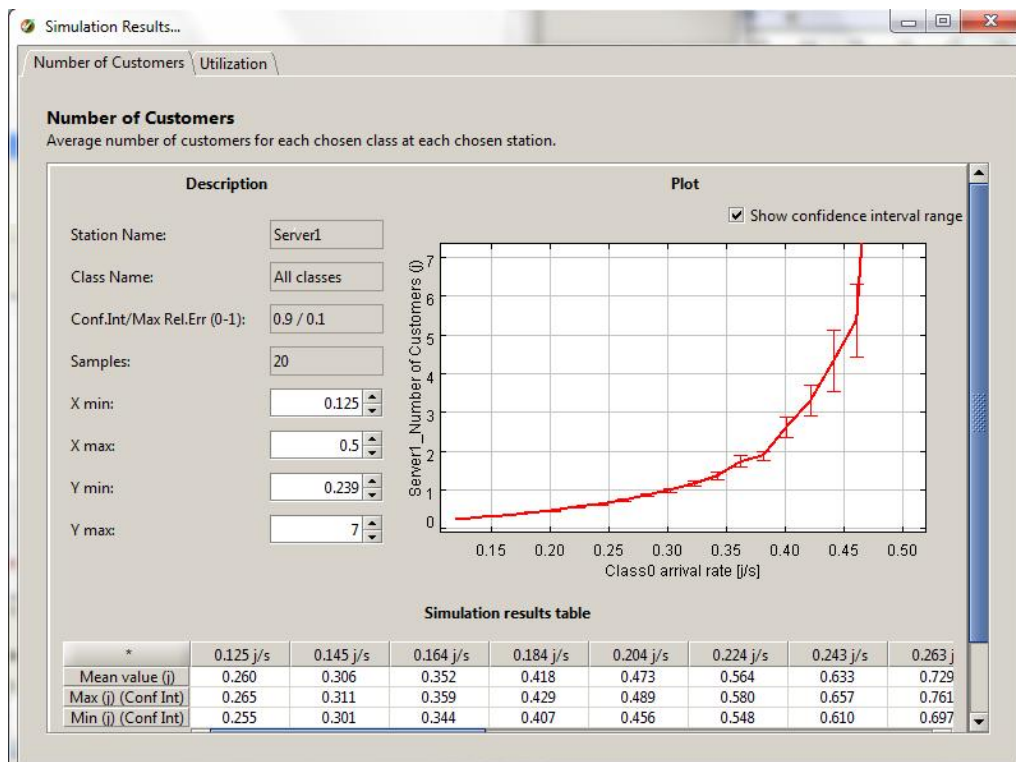


Figura 9: Risultati della simulazione per la corsia per proseguire dritto

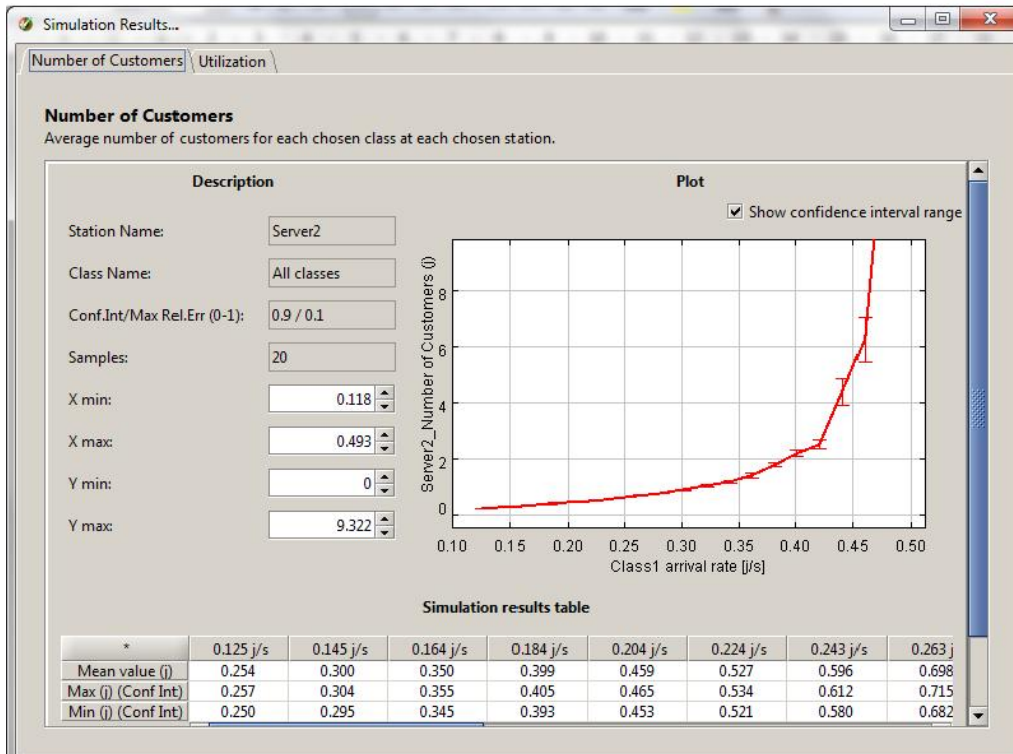


Figura 10: Risultati della simulazione per la corsia per la svolta corta

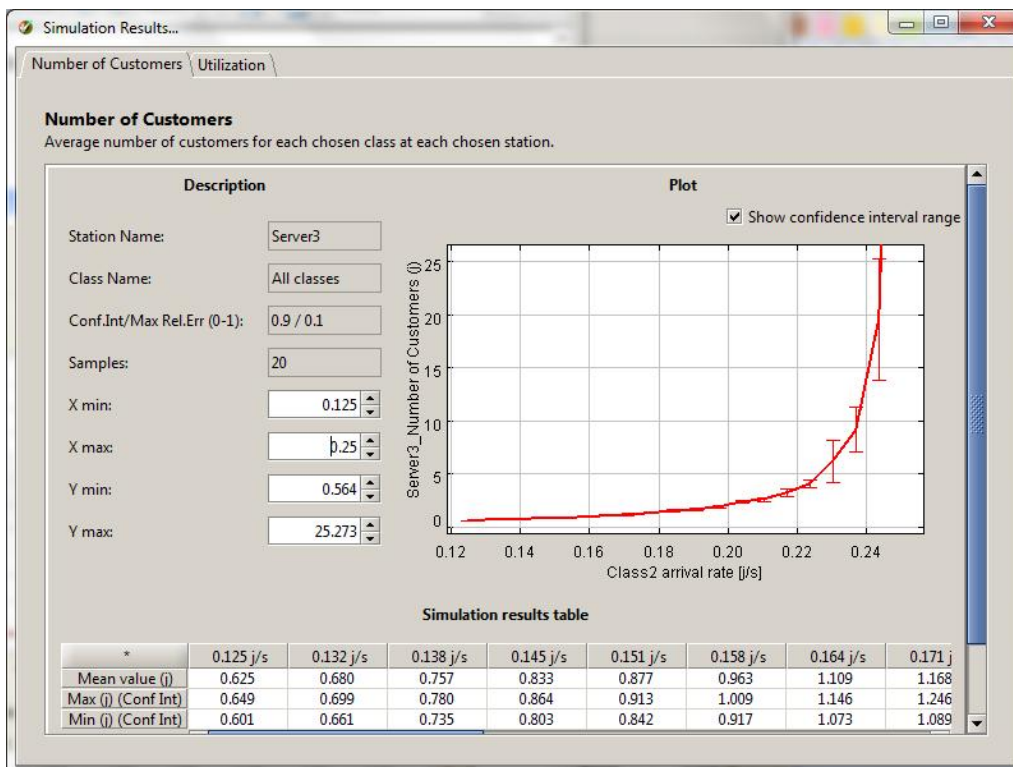


Figura 11: Risultati della simulazione per la corsia per la svolta lunga

Per verificare la correttezza di questo modello, rispetto alle formule matematiche indicate in precedenza, occorre innanzitutto ricavare le velocità delle autovetture per ogni tipo di manovra. Per la velocità delle auto che proseguono diritto, si ha:

$$S_s = \frac{2}{R_f \cdot R_s} \quad (27)$$

da cui si ottiene

$$0.5 = \frac{2}{R_f \cdot R_s} \quad (28)$$

e quindi da

$$4 = R_f \cdot R_s \quad (29)$$

andando a sostituire il valore preimpostato di R_f , si può trovare il valore di R_s :

$$R_s = 8 \quad (30)$$

Per la velocità delle auto che svoltano a destra (svolta breve), si ha:

$$S_{st} = \frac{2}{R_{st}} \quad (31)$$

da cui si ottiene

$$1 = \frac{2}{R_{st}} \quad (32)$$

per poi ricavare R_{st} :

$$R_{st} = 2 \quad (33)$$

Per la velocità delle auto che svoltano a sinistra (svolta lunga), si ha:

$$S_{lt} = \frac{2}{(1 - R_f) \cdot R_{lt}} \quad (34)$$

da cui si ottiene

$$1 = \frac{2}{0.5 \cdot R_{lt}} \quad (35)$$

per poi ricavare R_{lt} :

$$R_{lt} = 4 \quad (36)$$

Si assume come periodo del protocollo $T = 9\text{secondi}$ e come $R_f = 0.5\text{secondi}$.

Nel caso di prosecuzione diritto, il tempo medio di ogni utente nel sistema D si calcola nel modo seguente.

Dalla (9), sostituendo i valori di T e R_f , si ottiene

$$R = \frac{1}{4} \cdot (9 \cdot (2 - 0.5)^2 + \frac{0.5}{8}) = \frac{1}{4} \cdot (9 \cdot 2.25 + \frac{0.5}{8}) = 5.08 \quad (37)$$

Andando a sostituire il risultato nella (4) si ottiene

$$W = 5.08 + N \cdot 0.5 \quad (38)$$

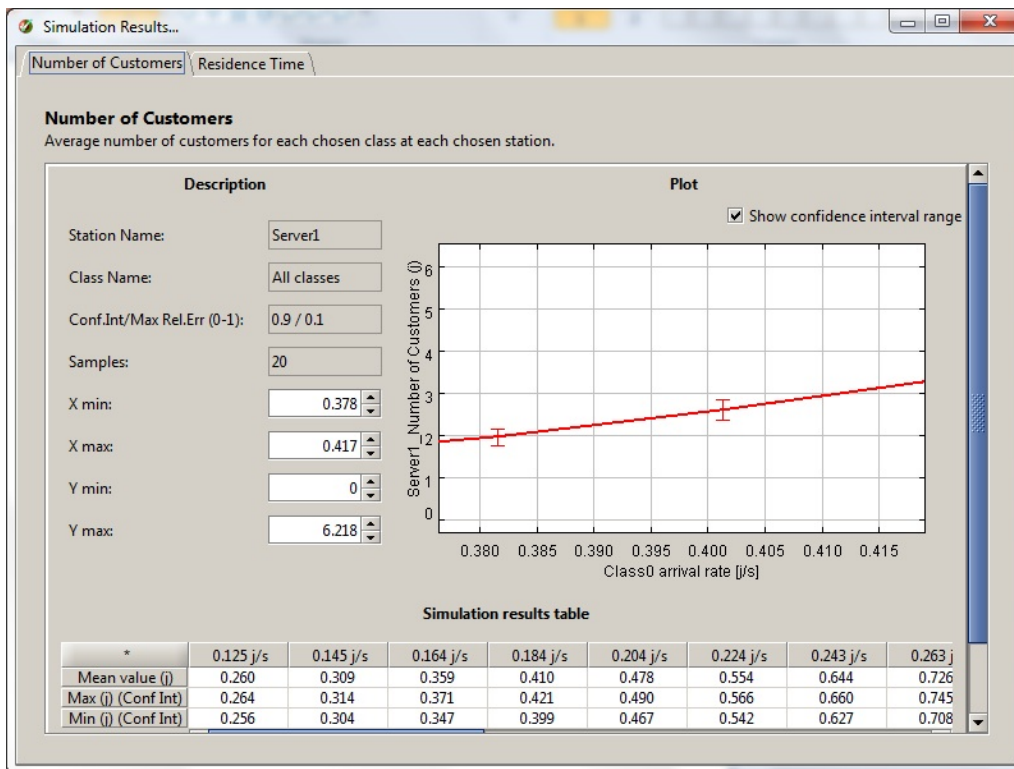


Figura 12: Numero di veicoli in coda in funzione del tasso di arrivo per proseguire diritto

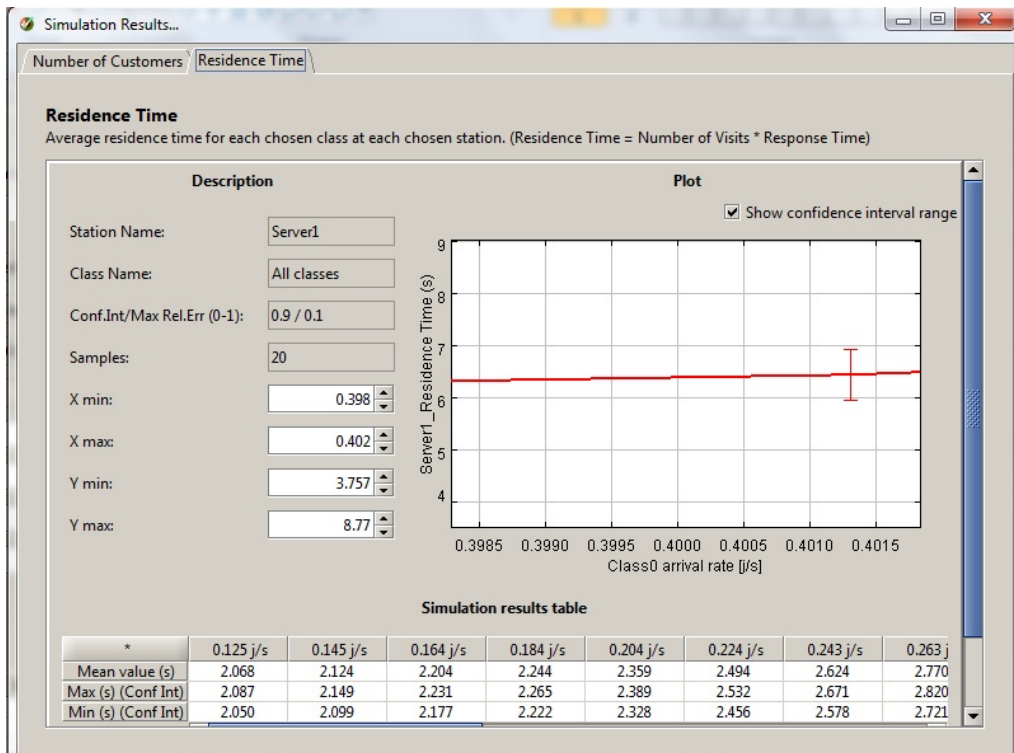


Figura 13: Andamento del Residence time in funzione del tasso di arrivo per proseguire diritto

Considerando $\frac{J}{S} = 0.4$, scelto a caso, avremo $N = 2.5$, come si può notare dal grafico in fig. 12.

Sostituendo il valore di N nella (38) si ottiene:

$$W = 5.08 + 2.5 \cdot 0.5 = 6.33 \quad (39)$$

Risulta ora possibile ricavare D dalla (6):

$$D = W + \frac{1}{8} = 6.33 + \frac{1}{8} = 6.455 \quad (40)$$

Come si vede dalla fig. 13, il valore calcolato è in linea con i risultati della simulazione.

Nel caso di svolta a destra, il tempo medio di ogni utente nel sistema D si calcola nel modo seguente.

Dalla (7), sostituendo i valori di T e $R_{st} = 2$, si ottiene

$$R = \frac{1}{4} \cdot \left(9 + \frac{1}{2}\right) = \frac{9.5}{4} = 2.375 \quad (41)$$

Andando a sostituire il risultato nella (4) con $S = 1$ si ottiene

$$W = 2.375 + N \quad (42)$$

Considerando $\frac{J}{S} = 0.4$, scelto a caso, avremo $N = 2.3$, come si può notare dal grafico in fig. 14.

Sostituendo il valore di N nella (42) si ottiene:

$$W = 2.375 + 2.3 = 4.675 \quad (43)$$

E' ora possibile ricavare D dalla (6):

$$D = W + \frac{1}{R_{st}} = 4.675 + \frac{1}{2} = 5.175 \quad (44)$$

Come si vede dalla fig. 15, il valore calcolato è in linea con i risultati della simulazione.

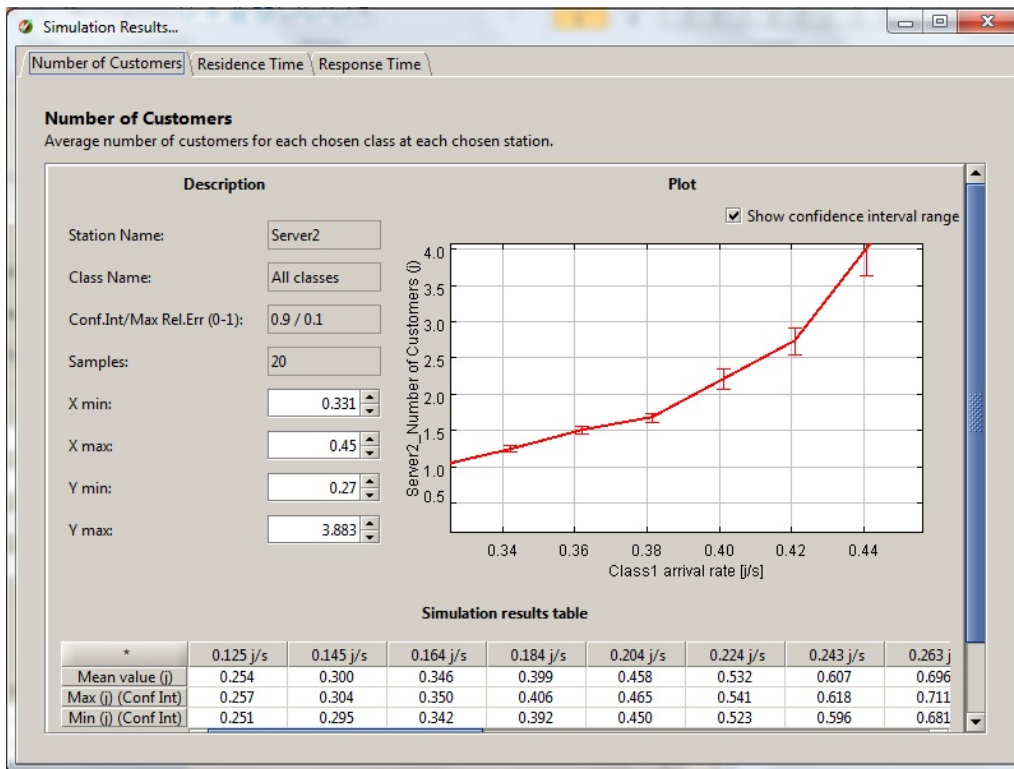


Figura 14: Numero di veicoli in coda in funzione del tasso di arrivo per la svolta a destra

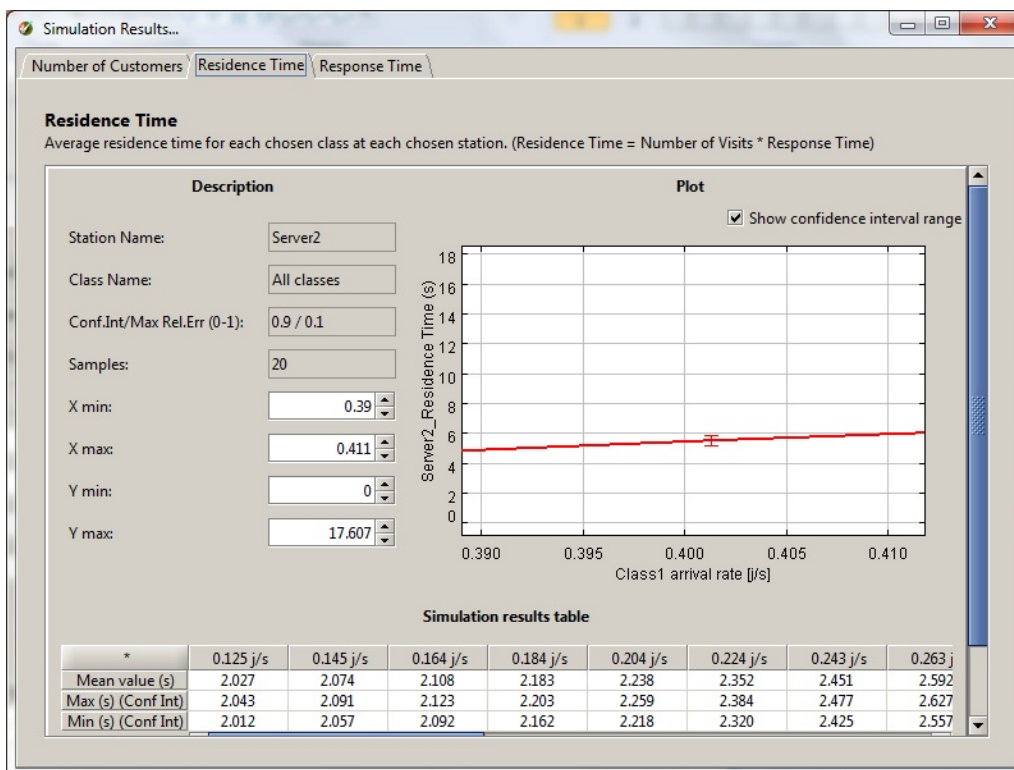


Figura 15: Andamento del Residence time in funzione del tasso di arrivo per la svolta a destra

Infine, nel caso di svolta a sinistra, il tempo medio di ogni utente nel sistema D si calcola nel modo seguente.

Dalla (8), sostituendo i valori di T , R_f e $R_{sl} = 4$, si ottiene

$$R = \frac{1}{4} \cdot \left(9 \cdot (1 + 0.5)^2 + \frac{1 - 0.5}{4} \right) = 5.1 \quad (45)$$

Andando a sostituire il risultato nella (4) con $S = 1$ si ottiene

$$W = 5.1 + N \quad (46)$$

Considerando $\frac{J}{S} = 0.16$, scelto a caso, avremo $N = 1$, come si può notare dal grafico in fig. 16.

Sostituendo il valore di N nella (46) si ottiene:

$$W = 5.1 + 1 = 6.1 \quad (47)$$

E' ora possibile ricavare D dalla (6):

$$D = W + \frac{1}{R_{lt}} = 6.1 + \frac{1}{4} = 6.35 \quad (48)$$

Come si vede dalla fig. 17, il valore calcolato è ancora una volta in linea con i risultati della simulazione.

Questo conclude le verifiche di correttezza tra formule matematiche e modello simulato con JMT per l'incrocio gestito da semaforo.

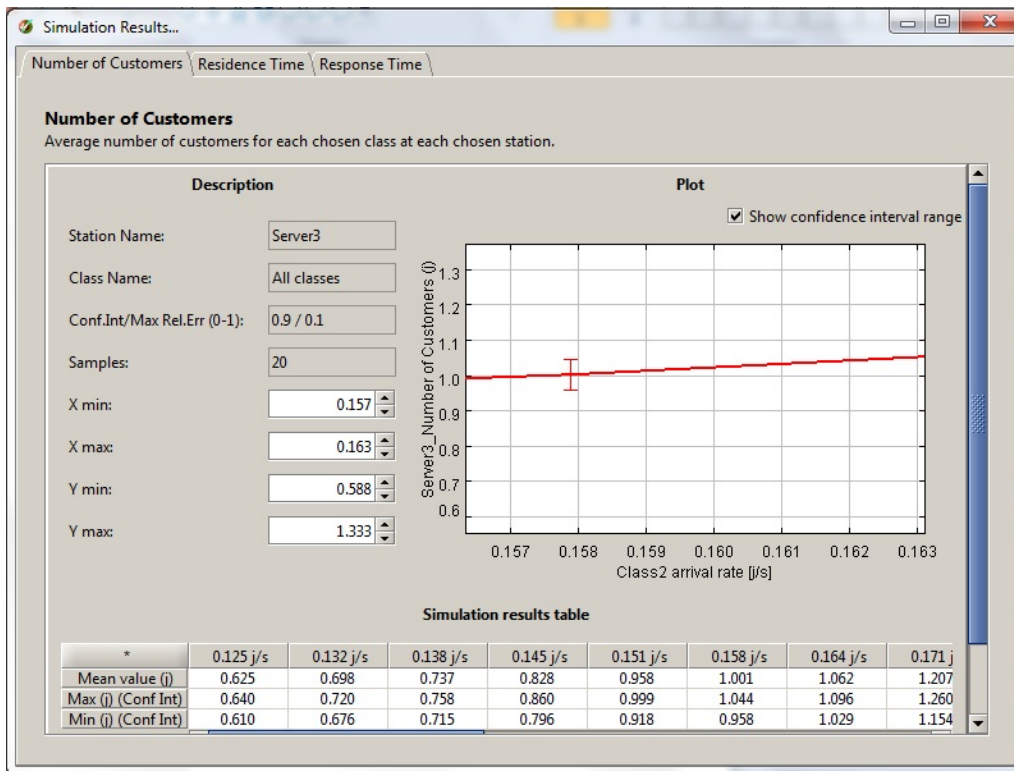


Figura 16: Numero di veicoli in coda in funzione del tasso di arrivo per la svolta a sinistra

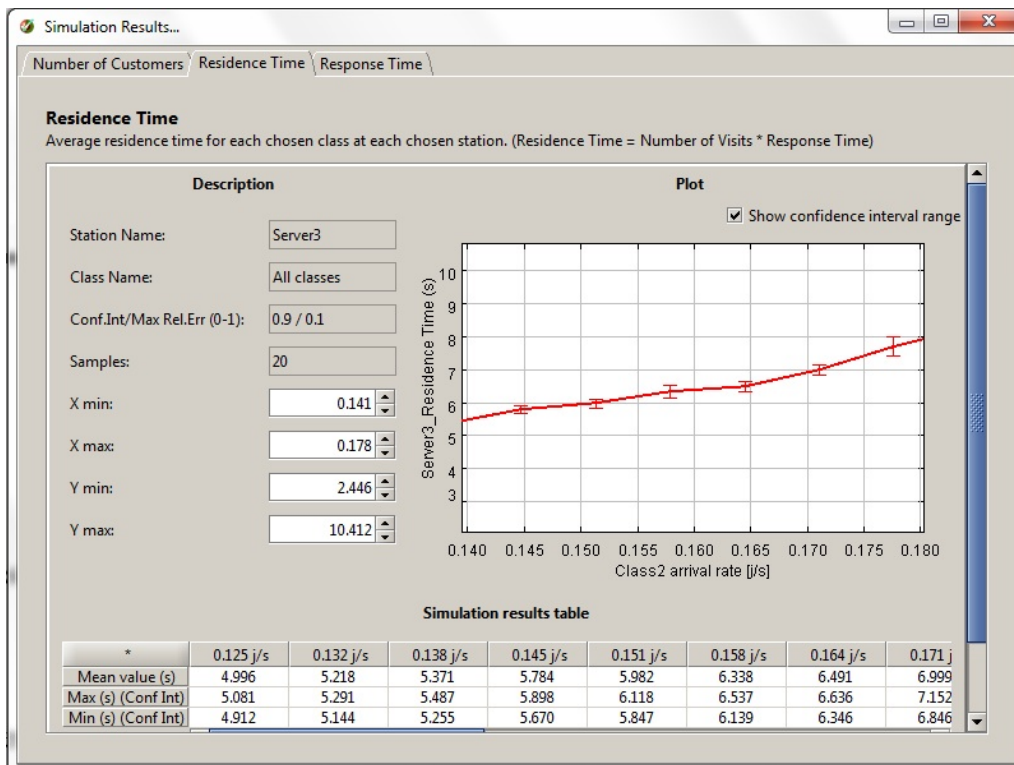


Figura 17: Andamento del Residence time in funzione del tasso di arrivo per la svolta a sinistra

1.4 Modellizzazione della rotatoria con JMT

A differenza del semaforo, l'incrocio regolato mediante rotatoria a due corsie viene modellato come un insieme di Server suddivisi in quarti di rotatoria: ogni quarto di rotatoria ha un server per ogni corsia che possiede. Ogni server, quindi, si occupa sia dei veicoli nella coda di ingresso della rotatoria sia dei veicoli che stanno occupando quella parte di rotatoria.

Il modello risultante è mostrato in figura 18. Balza subito all'occhio di come la rotatoria sia più complessa da modellizzare del semaforo.

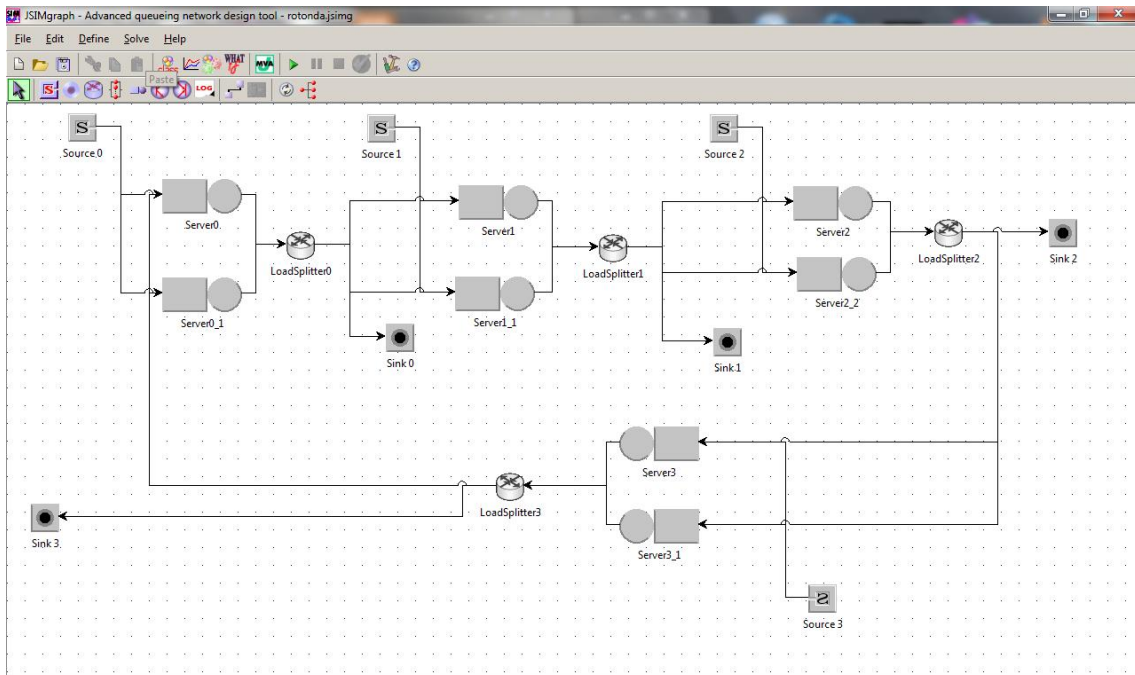


Figura 18: Modello di simulazione dell'incrocio con rotatoria a due corsie

I parametri di ingresso sono riassunti nella tabella 2.

Tabella 2: Parametri di ingresso

Distribuzione	Tempo di servizio	Routing
Poisson (4)	Costante (1)	Probabilistico
		$P_{Sink} = 0.25$
		$P_{Server_{X+1}} = 0.375$
		$P_{Server_{X+1-1}} = 0.375$

Nella fig. 19 e nella fig. 20 sono mostrati i risultati della simulazione effettuata mediante JMT. Il grafico descrive l'andamento del numero di clienti (veicoli in coda + in servizio) in funzione del tasso di arrivo dei veicoli in prossimità dell'incrocio. Come si può notare, anche in questo caso, man mano che il tasso di arrivo aumenta, il numero di veicoli in coda cresce in modo esponenziale.

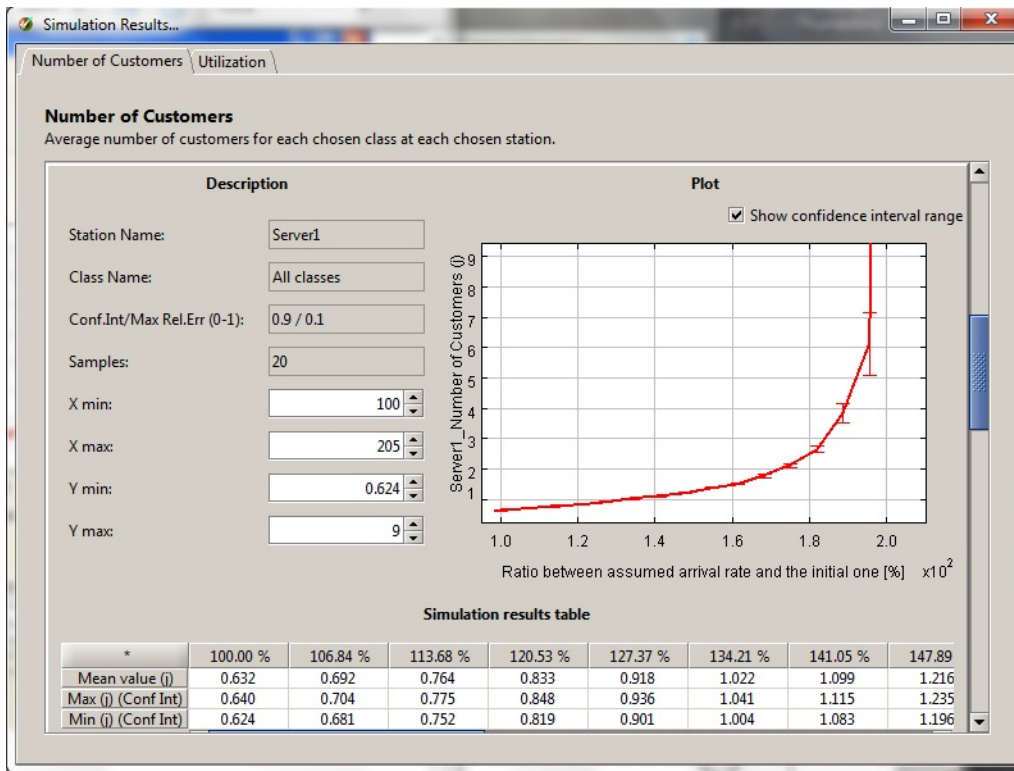


Figura 19: Numero di veicoli in coda in funzione del tasso di arrivo

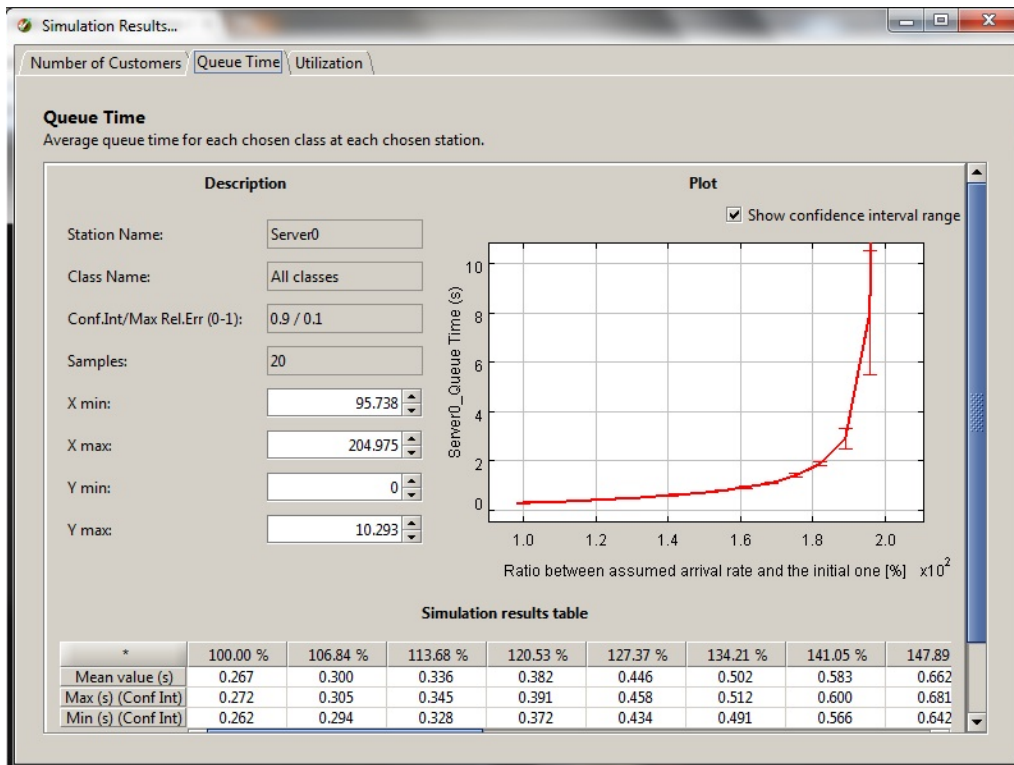


Figura 20: Tempo in coda in funzione del tasso di arrivo

1.5 Confronto tra semaforo e rotatoria

Al fine di confrontare l'efficienza del semaforo con quella della rotatoria, è necessario che i veicoli arrivino all'incrocio gestito dal semaforo con una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 4$. I risultati ottenuti sono mostrati nei grafici seguenti.

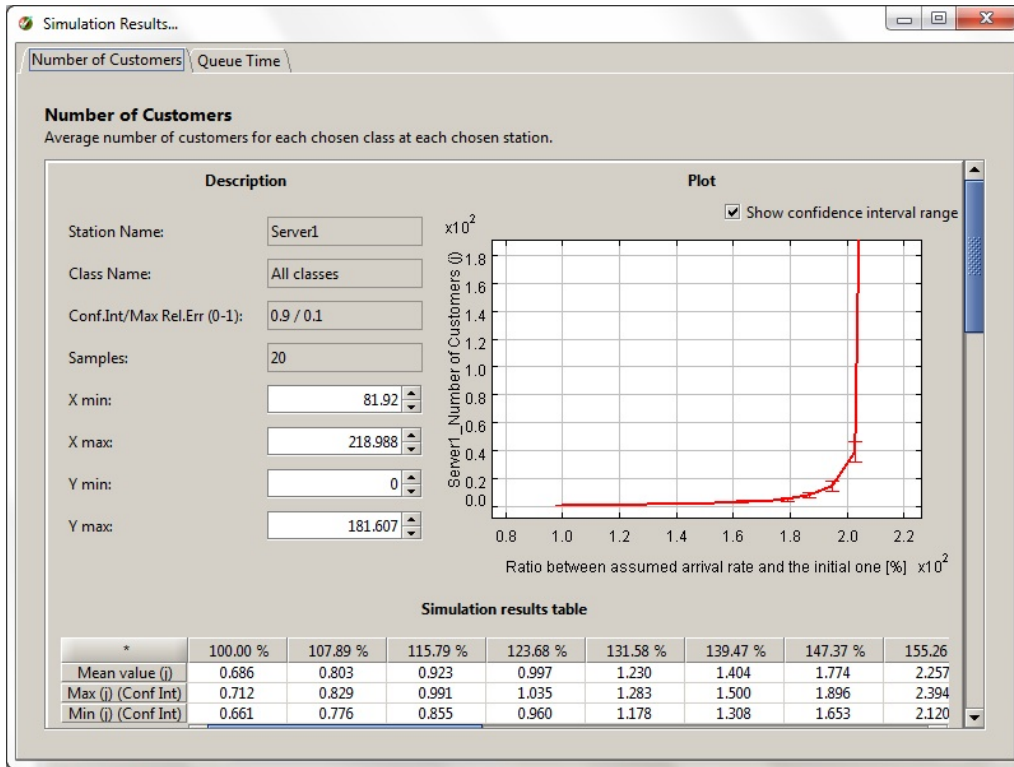


Figura 21: Prestazioni della corsia per proseguire diritto del semaforo

Come si può notare confrontando questi grafici con quelli ricavati nell'incrocio gestito dalla rotatoria, i risultati sono piuttosto diversi a seconda della corsia (mentre nella rotatoria i risultati sono del tutto identici).

Per chi intende proseguire diritto, il semaforo è sicuramente la soluzione più vantaggiosa, dato che per tassi di arrivo fino a 1.5 circa, il sistema garantisce un tempo di attesa trascurabile.

Per i veicoli che vogliono svoltare a destra, invece, i due risultati sono all'incirca equivalenti, con un leggero vantaggio a favore della rotatoria, che garantisce numero di veicoli in coda più basso a parità di tasso di arrivo.

Infine, per i veicoli che intendono svoltare a sinistra, la situazione è del tutto diversa. La rotatoria garantisce ancora un andamento esponenziale del numero di veicoli in coda, mentre il semaforo ha un andamento più lineare. Il risultato è che, per tassi di arrivo bassi, è preferibile la rotatoria, mentre per tassi di arrivo più alti (da 2.05 in avanti), risulta preferibile il semaforo con il suo andamento lineare.

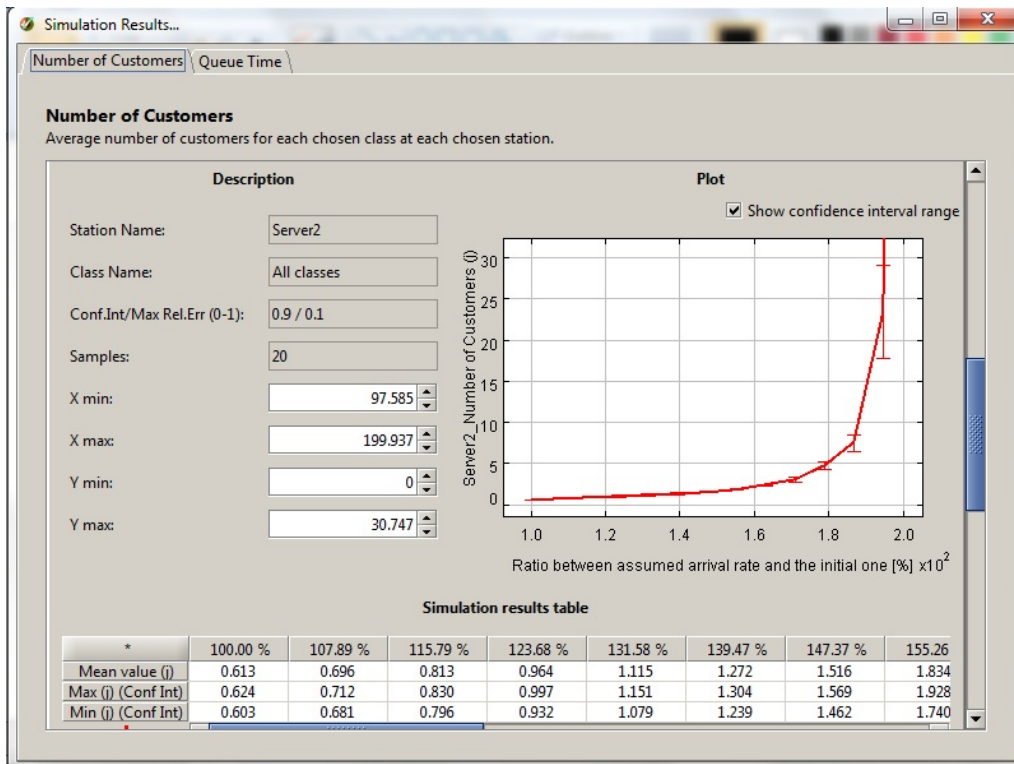


Figura 22: Prestazioni della corsia per svoltare a destra del semaforo

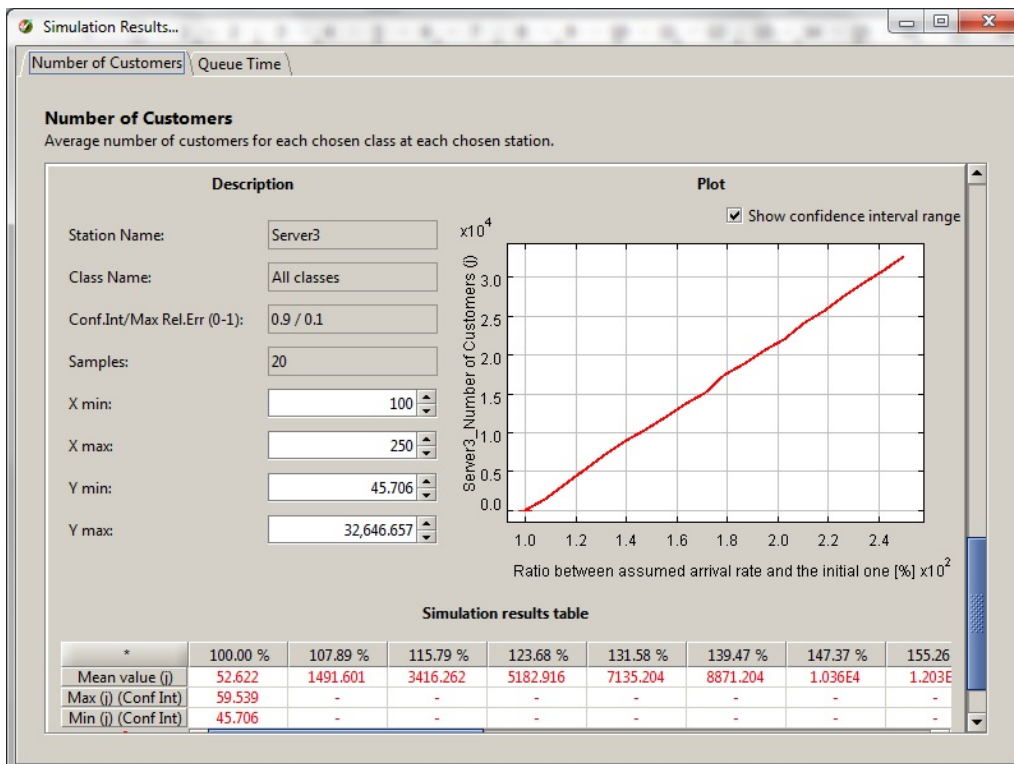


Figura 23: Prestazioni della corsia per svoltare a sinistra del semaforo

2 Le migliorie proposte

Dopo aver analizzato il sistema preso in esame nel lavoro di Zanini, vengono di seguito proposte alcune migliorie al modello precedente. La prima miglioria si propone di modificare il protocollo nell'incrocio gestito da semaforo, assegnando la priorità a una singola strada per un determinato lasso di tempo. La seconda miglioria proposta è quella di aumentare il numero di corsie della rotatoria da due a tre, con lo scopo di migliorare le prestazioni.

2.1 Incrocio gestito da semaforo a priorità fissa per singola strada

Il protocollo semaforico proposto nel lavoro di Zanini produce ottimi risultati, anche se il bilanciamento delle prestazioni è limitato alla differenza di auto presenti nelle corsie di una stessa strada, modulando il valore R_f .

Un protocollo alternativo per assegnare una priorità alle strade può essere l'assegnazione totale dell'incrocio ad una strada per un determinato lasso di tempo.

Indicando con T il periodo di cessione dell'incrocio a tutte le strade per lo svolgimento del servizio, si ottiene: $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = T$, che può essere scritto anche come $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1$.

Il nuovo modello del semaforo è mostrato in fig. 24.

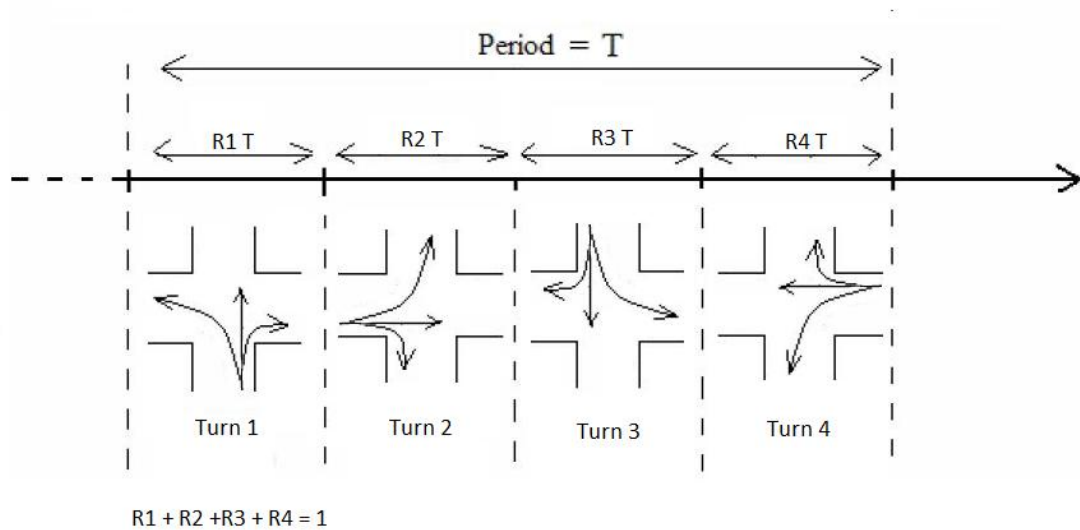


Figura 24: Modello di simulazione dell'incrocio con semaforo con diverso protocollo

Il tempo di servizio medio di ogni corsia di una determinata strada dipende dal valore di priorità associata a tale strada (R_i). Nel caso il veicolo voglia proseguire dritto, il tempo di servizio è dato dalla formula 49.

$$S'_s = \frac{T}{R_i \cdot T \cdot R_s} = \frac{1}{R_i \cdot R_s} \quad (49)$$

Nel caso il veicolo voglia svoltare a destra, il tempo di servizio medio è dato dalla formula 50.

$$S'_{st} = \frac{T}{R_i \cdot T \cdot R_{st}} = \frac{1}{R_i \cdot R_{st}} \quad (50)$$

Nel caso il veicolo voglia svoltare a sinistra, il tempo di servizio medio è dato dalla formula 51.

$$S'_{lt} = \frac{T}{R_i \cdot T \cdot R_{lt}} = \frac{1}{R_i \cdot R_{lt}} \quad (51)$$

Il modello JMT è uguale a quello utilizzato precedentemente mostrato in fig. 8.

Per effettuare un confronto corretto con il modello di Zanini, occorre utilizzare le velocità delle auto (R_s , R_{st} e R_{lt}), fissando $R_f = 0.5$ calcolate in precedenza .

Come primo confronto si consideri $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = \frac{1}{4}$, quindi con priorità bilanciate. Si avrà:

$$S'_s = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot 8} = 0.5 \quad (52)$$

$$S'_{st} = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot 2} = 2 \quad (53)$$

$$S'_{lt} = \frac{1}{\frac{1}{4} \cdot 4} = 1 \quad (54)$$

Come si può notare, i tempi di servizio rimangono uguali per i veicoli che intendono proseguire dritto e per quelli che svoltano a sinistra, mentre cambiano per quelli che svoltano a destra. In questo caso, si ha un notevole peggioramento delle prestazioni.

In fig. 25 si può vedere l'andamento del numero di veicoli in coda al variare del tasso di arrivo.

Come secondo confronto, si analizzi il caso in cui due strade hanno più priorità rispetto alle altre due, ad esempio $R_1 = 0.4$, $R_2 = 0.1$, $R_3 = 0.4$ e $R_4 = 0.1$, rispettando: $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 1$.

In questo caso, bisogna creare due modelli, il primo per le strade ad alta priorità 1 e 3, il secondo per le strade a bassa priorità 2 e 4; questi differiscono tra loro nei tempi di servizio, mentre il modello generale è sempre uguale a quello in fig. 8.

Per le strade ad alta priorità, il tempo di servizio sarà dato da:

$$S'_s = \frac{1}{0.4 \cdot 8} = 0.312 \quad (55)$$

$$S'_{st} = \frac{1}{0.4 \cdot 2} = 1.25 \quad (56)$$

$$S'_{lt} = \frac{1}{0.4 \cdot 4} = 0.625 \quad (57)$$

I risultati della simulazione sono mostrati nelle figure seguenti.

Come si può notare, si ha un netto miglioramento per la svolta a sinistra (long), che consente di gestire il 150 % in più di veicoli in arrivo al secondo (nella lunghezza della coda di 20 veicoli), e per i veicoli che intendono proseguire dritto, con un aumento del 190% di veicoli in arrivo al secondo (rispetto la lunghezza dalla coda di 7 autoveicoli).

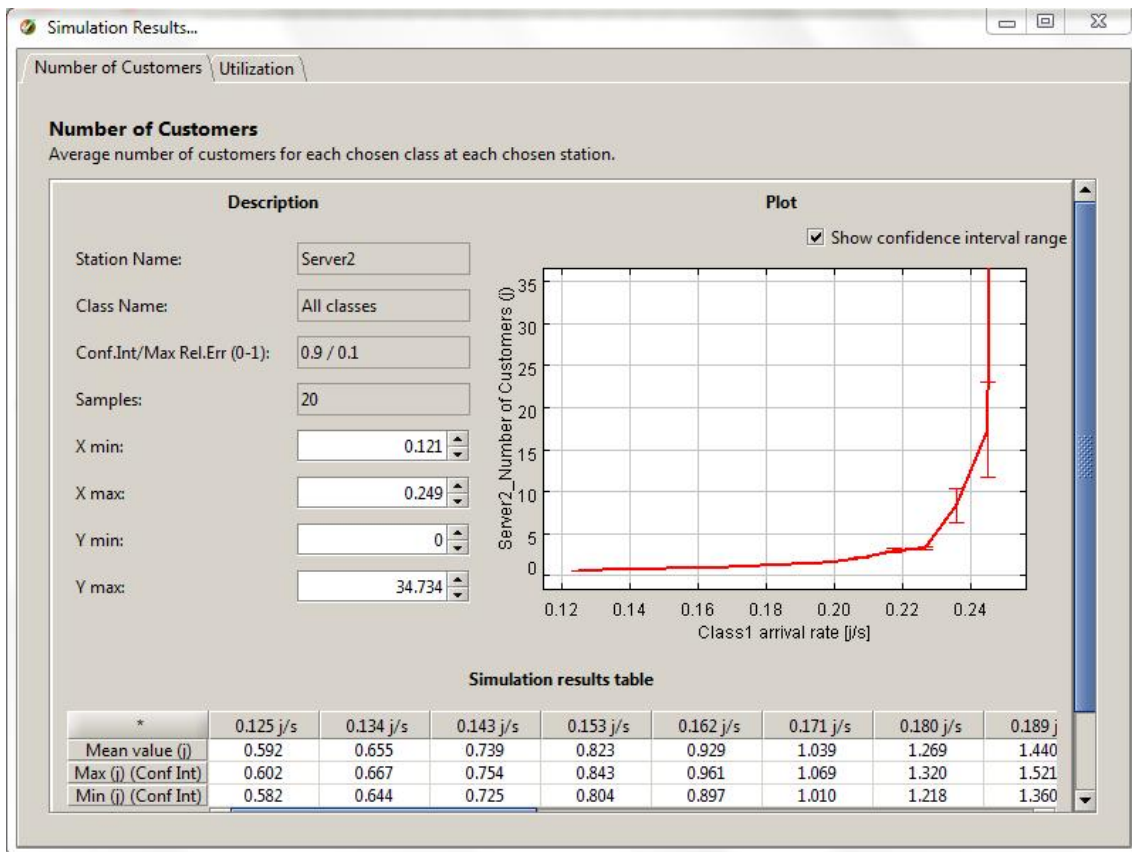


Figura 25: Risultati della simulazione per il primo confronto per la corsia di svolta a destra

Nel caso della svolta a destra (short), si può notare che le prestazioni non eguagliano il precedente protocollo, essendo inferiori ad esso di circa il 20% (valutato nella lunghezza della coda degli autoveicoli di 7 unità).

Per le strade a bassa priorità, invece, i tempi di servizio saranno dati da:

$$S'_s = \frac{1}{0.1 \cdot 8} = 1.25 \quad (58)$$

$$S'_{st} = \frac{1}{0.1 \cdot 2} = 5 \quad (59)$$

$$S'_{lt} = \frac{1}{0.1 \cdot 4} = 2.5 \quad (60)$$

I risultati della simulazione sono mostrati nelle figure seguenti.

Com'era prevedibile, le prestazioni sono estremamente peggiorate, soprattutto per le svolte che faticano a ricevere più di una autovettura ogni 10 secondi.

Questo tipo di protocollo così sbilanciato si dimostra essere indicato in quegli incroci dove le due strade che si intersecano hanno un diverso carico: quelle a maggior priorità sono strade più trafficate, mentre quelle a bassa priorità sono strade meno trafficate. In questo modo, il protocollo risulta ben funzionante in quanto i veicoli che percorrono le strade a bassa priorità, e che quindi devono attendere numerosi secondi prima di essere serviti, sono un numero molto basso.

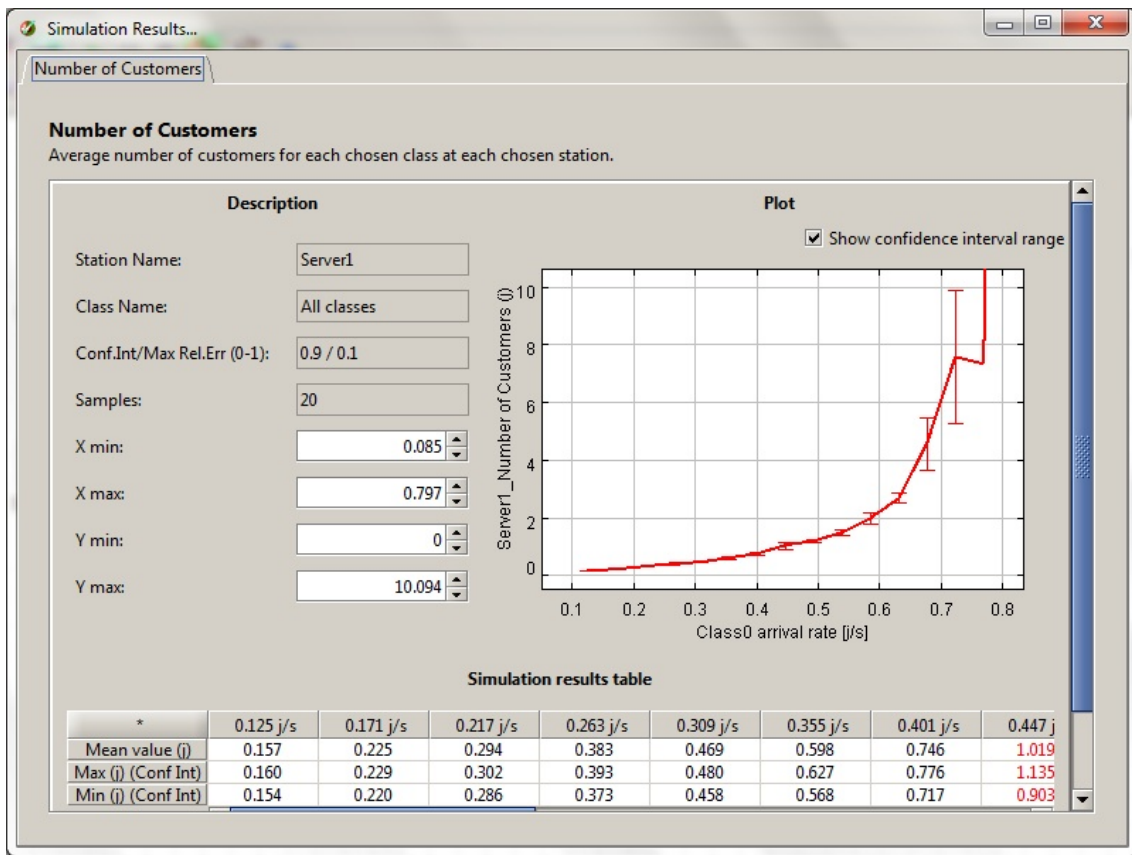


Figura 26: Risultati della simulazione per la corsia diritto

In ogni caso, si può notare una riduzione delle prestazioni nel caso della svolta a destra rispetto al modello precedente.

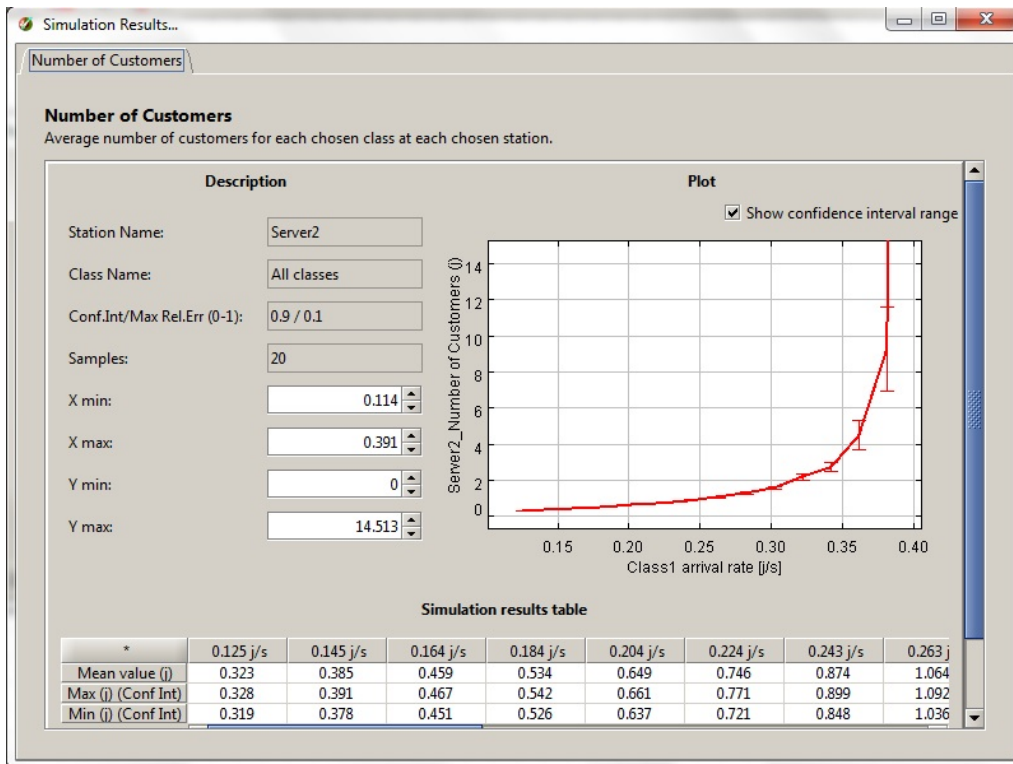


Figura 27: Risultati della simulazione per la corsia svolta a destra

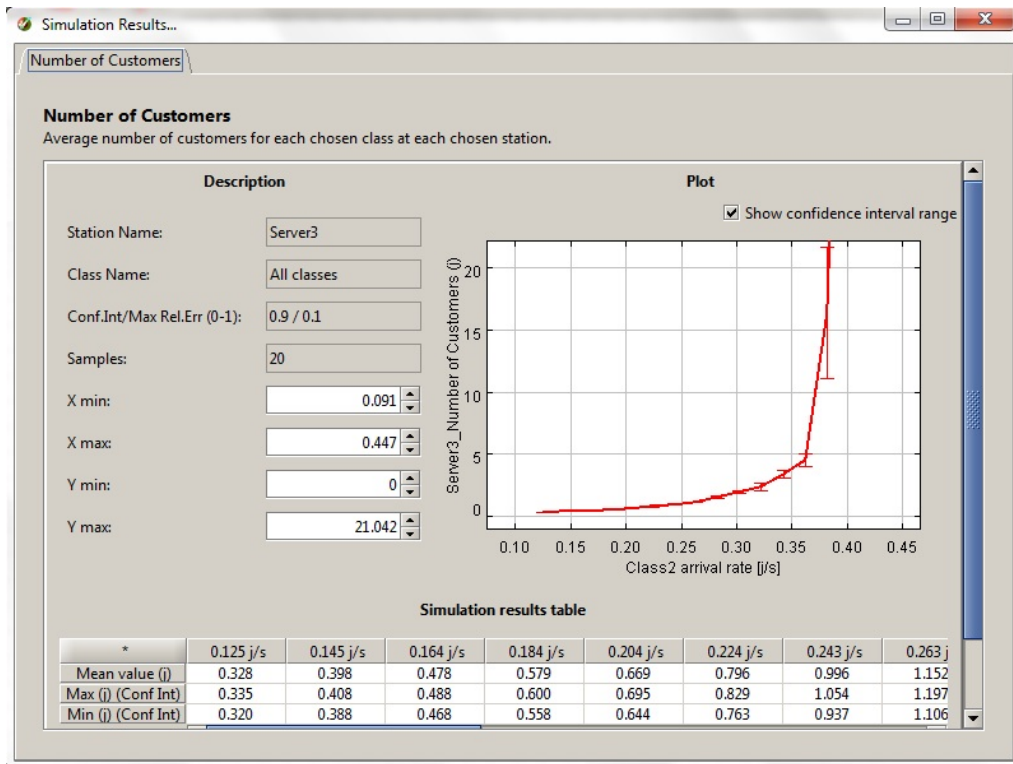


Figura 28: Risultati della simulazione per la corsia svolta a sinistra

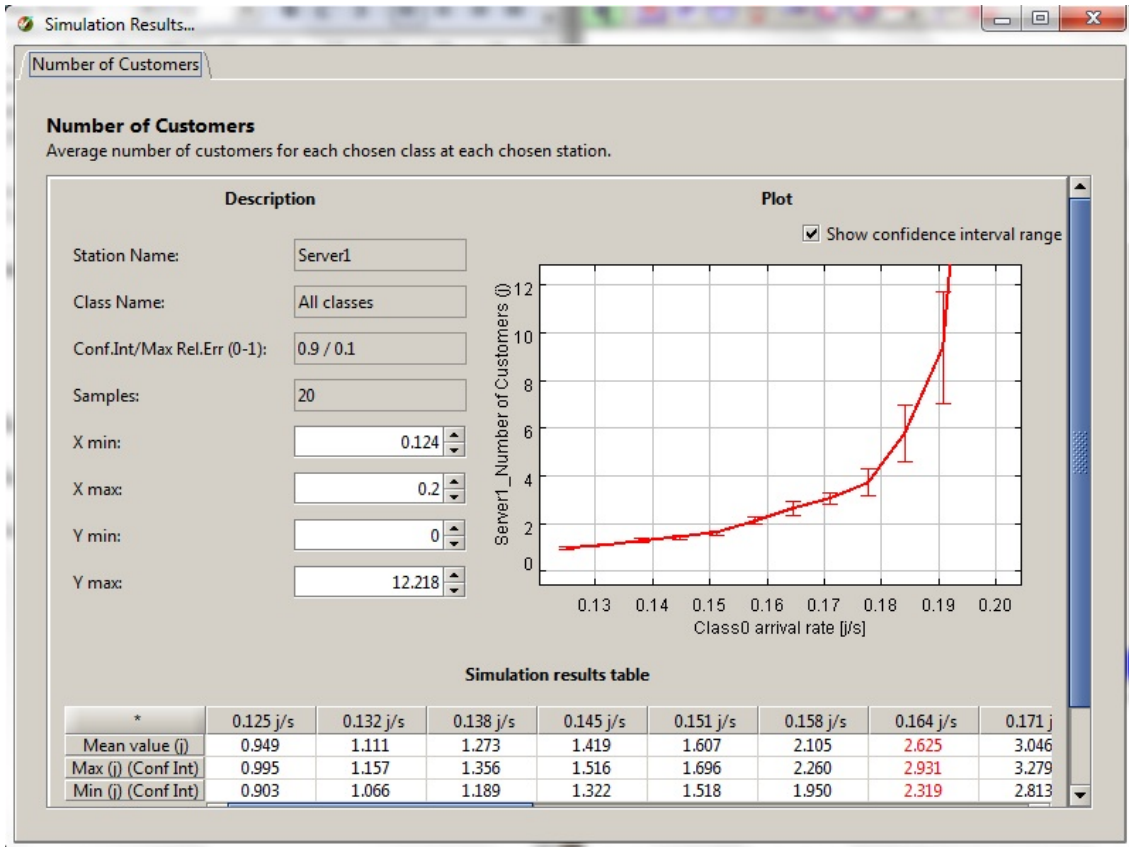


Figura 29: Risultati della simulazione per la corsia diritto

Viene di seguito proposta un'ulteriore modifica del protocollo che migliora ulteriormente le prestazioni. Il nuovo modello è mostrato in fig. 32

Con questo modello vengono migliorate le prestazioni di servizio per le autovetture che vogliono svoltare a destra (short), mentre nel caso di svolta a sinistra (long) e prosecuzione diritto i tempi di servizio rimangono invariati. Il tempo di servizio della svolta a destra diventa:

$$S'_{st} = \frac{T}{(R_i + R \cdot ((i - 1) \bmod 4)) \cdot T \cdot R_{st}} \quad (61)$$

da cui si ricava

$$S'_{st} = \frac{1}{(R_i + R \cdot ((i - 1) \bmod 4)) \cdot R_{st}} \quad (62)$$

Nel caso si abbia priorità uguale per ogni strada, quindi $R_i = \frac{1}{4}$ per ogni i , il tempo di servizio per la svolta a destra risulta:

$$S'_{st} = \frac{1}{(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) \cdot R_{st}} \quad (63)$$

con

$$R_{st} = 2 \quad (64)$$

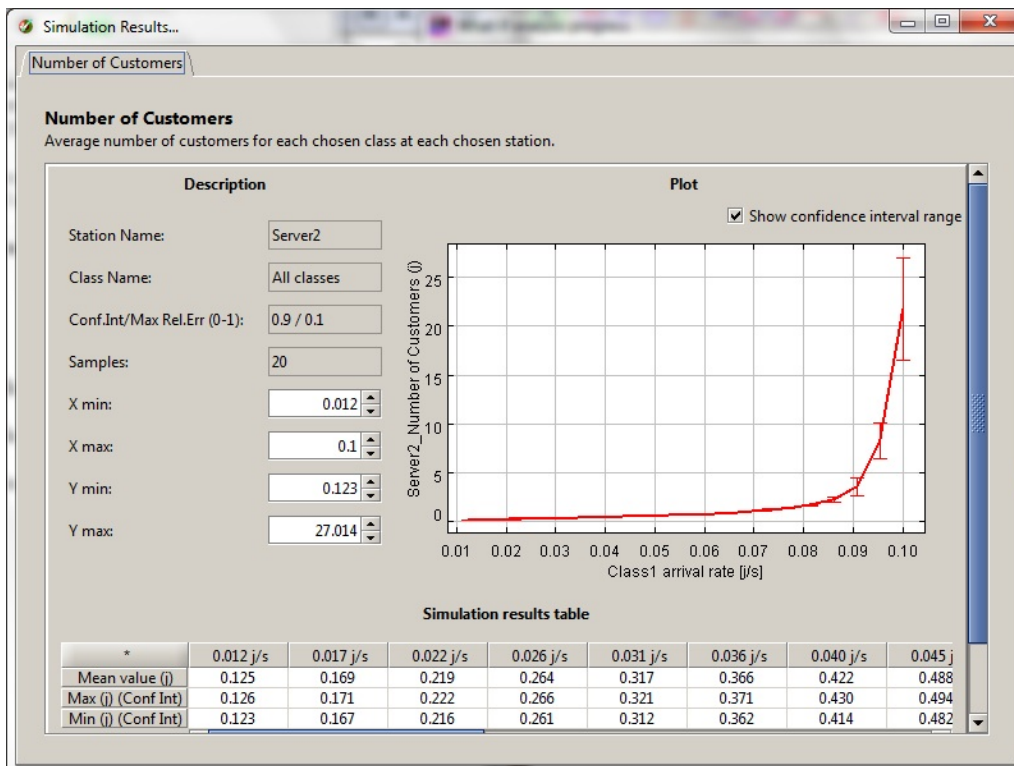


Figura 30: Risultati della simulazione per la corsia svolta a destra

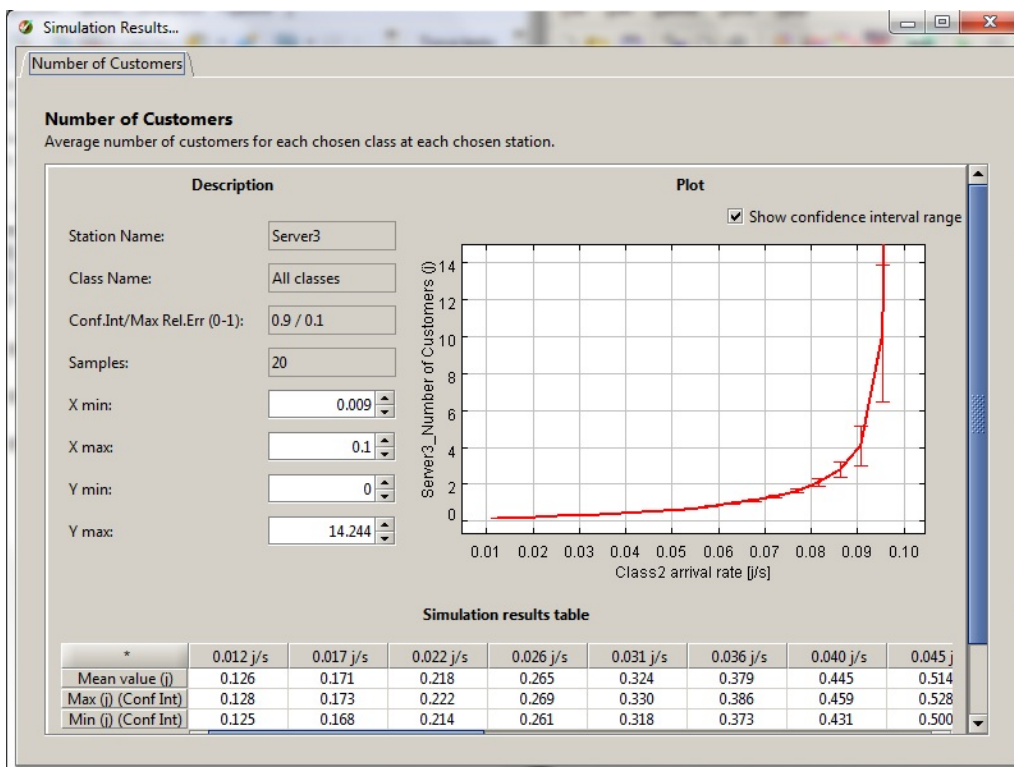


Figura 31: Risultati della simulazione per la corsia svolta a sinistra

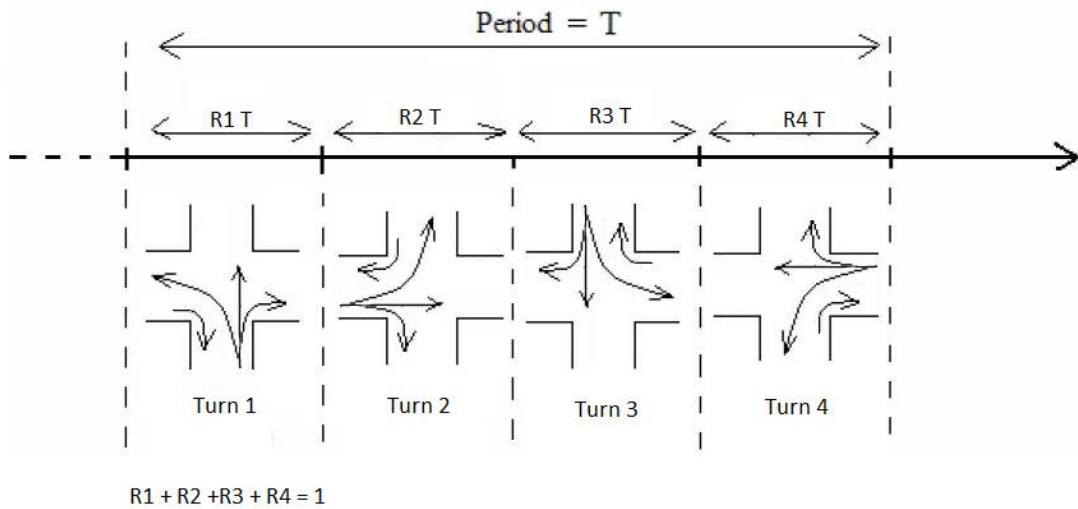


Figura 32: Modello di simulazione dell'incrocio con semaforo con protocollo modificato

e, quindi,

$$S'_{st} = 1 \quad (65)$$

Nel calcolo vengono sommati due contributi di priorità $\frac{1}{4}$ in quanto nel nuovo protocollo sono presenti due round, cioè due opportunità, per svoltare a destra: ad esempio, chi proviene dalla strada in basso può girare a destra nel turno 1 o nel turno 4.

Si noti che questo protocollo ha sostanzialmente gli stessi risultati di quello indicato da Zanini, con l'unica differenza che in questo è possibile assegnare diversamente la priorità ad una strada rispetto alle sue corsie, mentre nel protocollo di Zanini la svolta a destra era comunque indipendente dalle variabili.

Infine, non resta che valutare i cambiamenti nel caso di strade con priorità differente, ad esempio con $R_1 = 0.4$, $R_2 = 0.1$, $R_3 = 0.4$ e $R_4 = 0.1$; come si può notare, le strade opposte (arterie) hanno la stessa priorità.

Il tempo di servizio medio per la svolta a destra risulta essere:

$$S'_{st} = \frac{1}{(0.4 + 0.1) \cdot R_{st}} = 1 \quad (66)$$

Tale tempo di servizio è uguale per entrambe le tipologie di strada (alta priorità e bassa priorità), e coincide con il tempo di servizio medio per la svolta a destra del protocollo iniziale. Questo è vero se e solo se le strade opposte hanno priorità uguale.

2.2 Incrocio con rotatoria a tre corsie

A livello di modellazione la rotatoria a tre corsie è molto simile a quella vista precedentemente: l'unica cosa che cambia è che viene aggiunto un server in più per ogni quarto di rotonda. Il nuovo modello è visibile nella fig. 33.

I parametri di ingresso sono riassunti nella tabella 3.

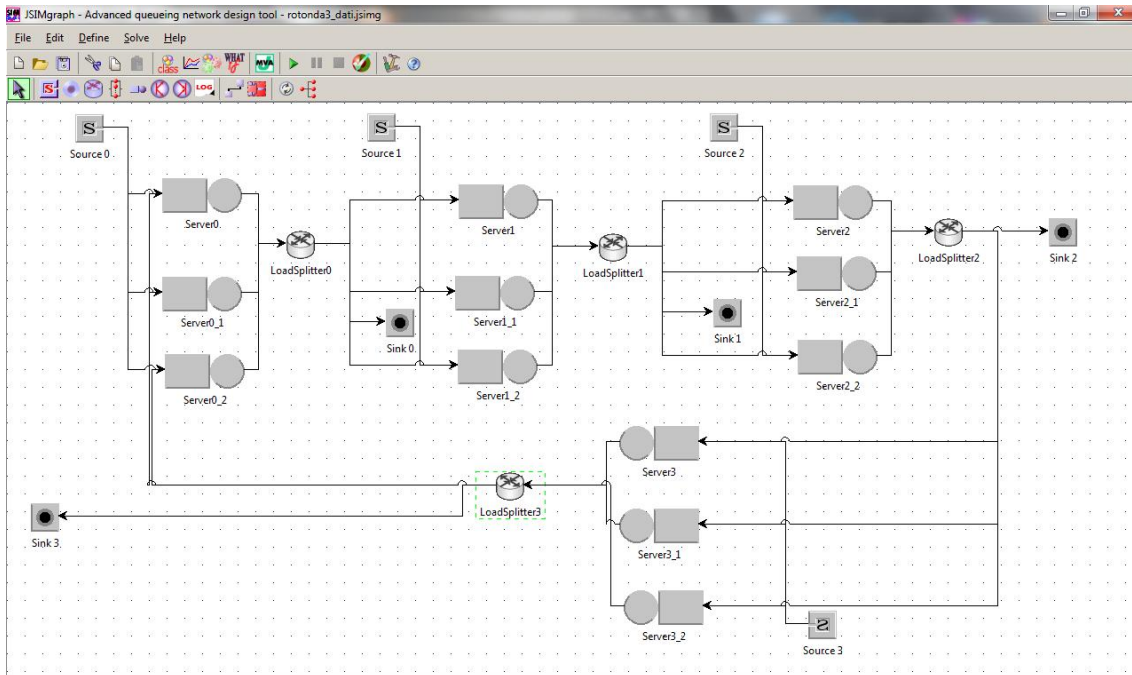


Figura 33: Modello di simulazione dell'incrocio con rotonda a tre corsie

Tabella 3: Parametri di ingresso

Distribuzione	Tempo di servizio	Routing
Poisson (4)	Costante (1)	Probabilistico
		$P_{Sink_X} = 0.25$
		$P_{Server_{X+1}} = 0.25$
		$P_{Server_{X+1_1}} = 0.25$
		$P_{Server_{X+1_2}} = 0.25$

Nella fig. 34 e nella fig. 35 sono mostrati i risultati della simulazione effettuata mediante JMT. Come si può vedere dal grafico, che descrive l'andamento del numero di clienti (veicoli in coda + in servizio) in funzione del tasso di arrivo dei veicoli in prossimità dell'incrocio, i risultati sono sensibilmente migliori di quelli ottenuti con la rotonda con sole due corsie: il numero di veicoli in coda cresce più lentamente in funzione del tasso di arrivo.

Ad esempio, nel caso in cui il tasso di arrivo di veicoli sia di 1.8, i veicoli in coda nella rotonda a tre corsie sono circa 1, mentre nella versione a due corsie erano quasi 3. Chiaramente, l'aggiunta di una corsia, consente di servire più veicoli alla rotonda e, di conseguenza, snellire la coda di veicoli in attesa del servizio.

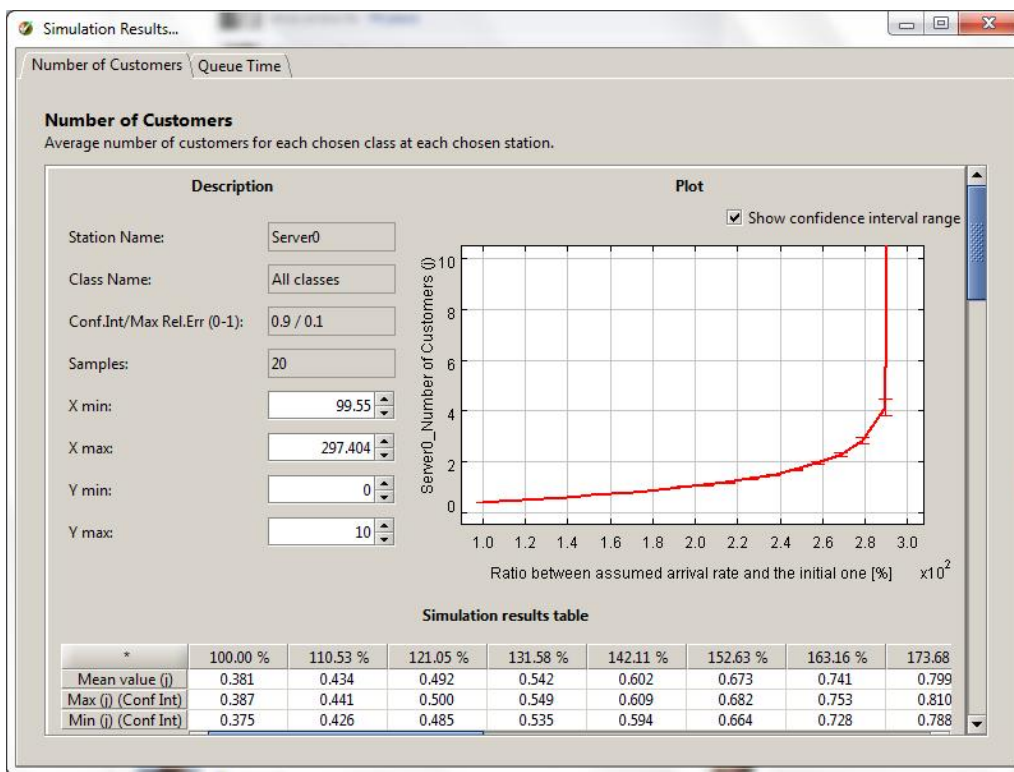


Figura 34: Numero di veicoli in coda in funzione del tasso di arrivo nella rotonda a tre corsie

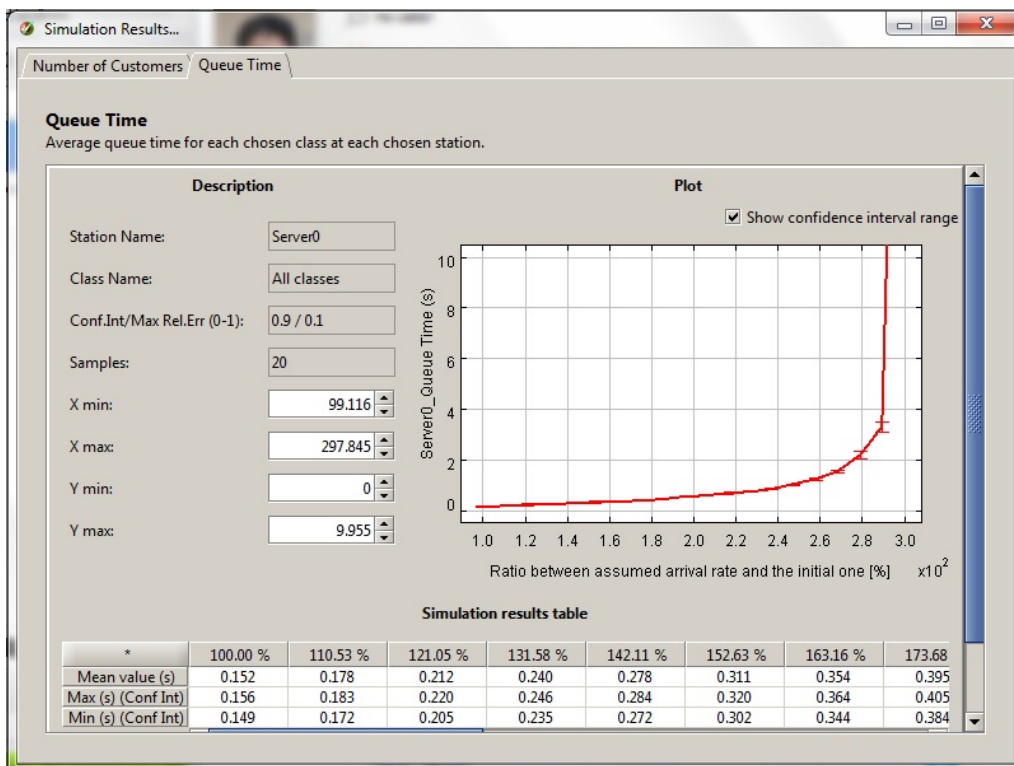


Figura 35: Tempo in coda in funzione del tasso di arrivo nella rotonda a tre corsie

3 Conclusioni

In questa relazione è stato analizzato il lavoro di Zanini, sono stati ricavati i risultati derivanti dalle sue simulazioni con una precisione piuttosto accurata (ad eccezione del cambio di versione di JMT) e sono stati confrontati con alcune migliorie proposte.

Dai confronti fatti, rispetto alle diverse tipologie di semaforo, si può notare che non esiste un protocollo migliore di un altro, ma ognuno deve essere valutato in relazione alla tipologia di strade e di incroci presenti, al numero di veicoli che mediamente scelgono di proseguire verso una determinata direzione e così via.

Nei risultati ottenuti si è notato che le prestazioni del semaforo per i veicoli che devono andare dritto risultano migliori di quelli della rotatoria a due corsie; per i veicoli che intendono svoltare a destra, i risultati sono simili tra rotatoria a due corsie e semaforo, con un leggero vantaggio a favore della rotatoria; infine, per i veicoli che vogliono svoltare a sinistra, i risultati sono del tutto diversi tra semaforo e rotatoria; in quest'ultimo caso, occorre preferire la rotatoria su strade in cui il tasso di arrivo delle auto risulta limitato (inferiore a 2.05), mentre in tutti gli altri casi è preferibile l'andamento lineare del semaforo.

I risultati migliori sono stati ottenuti dalla rotonda a tre corsie, che migliora le prestazioni rispetto a quella a due corsie del 155%; tuttavia, nella realtà si potrebbero avere alcuni problemi non considerati nel modello JMT, come ad esempio la difficoltà di accesso alle corsie più interne della rotonda.

Il problema del traffico e di come gestirlo al meglio è un problema ancora aperto ai giorni nostri. Si pensi che in Italia, chi vive nelle città con più di 500.000 abitanti, perde mediamente 177 ore ogni anno, a causa del traffico. Tuttavia, come si è visto anche in questa relazione, non esiste la soluzione perfetta al problema del traffico: ognuna ha vantaggi e svantaggi.

Non stupisce, quindi, che molti esperti di viabilità autostradale riportino la seguente frase attribuita al celebre Edward Murphy: *Quando c'è un blocco del traffico sull'autostrada, la fila più veloce è sempre quella accanto*, disponibile anche in altre versioni come *Scegli la coda che vuoi, non sarà mai la più veloce* o ancora *Se la tua coda è la più veloce, allora sei nella coda sbagliata*: per quanto si studino modelli di gestione del traffico, una buona dose di (s)fortuna bisogna sempre metterla in conto.

Bibliografia

[1] F. Zanini, *Modeling of a road junction using queuing theory, MATLAB and JMT environments*

[2] G. Serazzi, *JMT User Guide*

[3] G. Conte, *Slides del corso di Sistemi Informativi*

[4] http://it.wikipedia.org/wiki/Legge_di_Little

[5] http://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_delle_code

[6] <http://areeweb.polito.it/didattica/polymath>

[7] <http://adacher.dia.uniroma3.it/automazione1/TeoriaCode.pdf>